Компактність

Нехай (X,d) — метричний простір. Для довільної множини $A \subset X$ можна визначити діаметр A як $\mathrm{diam}(A) = \sup_{\{x,y\}\subset X} d(x,y)$.

Означення 1. Набір відкритих множин $\mathcal{C} = \{U_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ називається покритттям множини $A \subset X$, якщо

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Сім'я $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ називається підпокриттям $\mathcal{C}$, якщо об'єднання елементів з $\mathcal{C}'$ як і раніше містить A.

Наприклад, $\{[x-1/2,\ x+1/2] :\ x \in [0,1]\}$ є покриттям $[0,1]$, а $\{[-1/2,1/2],\ [0,1],\ [1/2,3/2]\}$ є підпокриттям.

Означення 2. Метричний простір (X,d) називається компактним, якщо в довільному його покритті можна вибрати скінченне підпокриття. Множина $A \subset X$ є компактною (X не обов'язково має бути компактним), якщо в довільному покритті A можна вибрати скінченне підпокриття.

Задача 1. Дано нескінченну послідовність вкладених замкнених непорожніх підмножин метричного компакту (X,d) $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($F_{i+1} \subset F_i$ для кожного i). Доведіть, що

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset.$$

Скільки елементів в цьому перетині, якщо $\mathrm{diam}\ F_i \to 0$, $n \to +\infty$?

Задача 2. Доведіть, що замкнена підмножина компактного простору є компактною.

Задача 3. Доведіть, що якщо (X,d) — компакт, то для довільного $\epsilon > 0$ можна знайти скінченну множину $E \subset X$ таку, що для довільного $x \in X$ $\min_{y\in E} d(x,y) < \epsilon$.

Теорема 1. Наступні умови є еквівалентними:

1. (X,d) є компактним;
2. з довільної послідовності точок (X,d) можна вибрати збіжну підпослідовність.

Задача 4. Нехай (X_1,d_1), X_2,d_2 — два компактні метричні простори. На множині $X_1 \times X_2$ означимо метрику d за правилом: для довільних точок $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$ $d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$. Згадайте, що d — метрика і доведіть, що $(X_1 \times X_2, d)$ — компакт.

Задача 5. Доведіть, що підмножина простору $\mathbb{R}^n$ є компактною тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Задача 6. Дано компактний метричний простір (X,d). Доведіть, що довільна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ досягає свого максимуму і мінімуму.

Задача 7. Нехай (X,d) — метричний простір, $F \subset X$ — компакт і $x \in X$. Доведіть, що існує $z \in A$ така, що $d(x,z) = \min_{y\in A} d(x,y)$.

Означення 3. Нехай (X,d_1), (Y,d_2) — два метричні простори. Відображення $f : X \to \mathbb{Y}$ називається рівномірно неперервним, якщо для довільного $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільних $x,y \in X$ з $d_1(x,y) < \delta$ виконується $d_2(f(x),f(y)) < \epsilon$.

Задача 8. Наведіть приклад двох метричних просторів і неперервного відображення з одного в інше, яке є неперервним, але не рівномірно неперервним.

Теорема 2. Доведіть, що будь-яке неперервне відображення, визначене на компакті, рівномірно неперервне на ньому.

Додому

Задача 1. Доведіть еквівалентне означення компакту: метричний простір (X, d) — компакт тоді і лише тоді коли перетин довільної сім'ї замкнених множин з властивістю скінченного перетину непорожній.

Сім'я множин $\{A_\alpha,\ \alpha \in I\}$ має властивість скінченного перетину, якщо довільний скінченний набір цих множин $(A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots A_{\alpha_n})$ має непорожній перетин.

Задача 2. Дано два метричні простори (X, d_1), (Y, d_2), причому X — компакт. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне. Доведіть, що $f(X)$ є компактною множиною Y.

Задача 3. Доведіть, що якщо (X, d) — компакт, то існують дві точки $x, y \in X$ такі що $d(x, y) = \operatorname{diam} X$.

Задача 4. (Число Лебега) Нехай $\mathcal{C}$ — якесь відкрите покриття метричного компакту (X, d). Доведіть, що існує таке число $\delta > 0$, що для довільної точки $x \in X$ знайдеться елемент $U \in \mathcal{C}$ такий, що $B(x, \delta) \subset U$.