Графы 1

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Граф задаётся множеством точек и множеством отрезков, соединяющих точки. Точки называют вершинами, а отрезки называют рёбрами. Примеры графов: несколько точек (множество отрезков — пусто); пара точек, соединённых отрезком; и так далее. Степенью вершины графа называют число рёбер, которые выходят из этой вершины.

Граф называется связным, если можно добраться из любой вершины в любую, проходя по рёбрам.

Циклом называется путь в графе, который начинается и заканчивается в одной вершине, причем проходит по *разным* рёбрам (путь из вершины 1 в вершину 2 и назад не является циклом). Связный граф без циклов называется деревом.

Граф называется полным, если каждая вершина соединена ребром с каждой другой.

1. Дан граф, вершины которого занумерованы от 1 до n. Пусть степень первой вершины — d_1, второй — d_2, ..., n-ой — d_n. Доказать, что количество рёбер в графе равно $(d_1 + \cdots + d_n)/2$.
2. Может ли существовать граф на нечётном количестве вершин, у которого степень каждой вершины — нечётная?
3. Может ли в стране, где из каждого города выходит по три дороги, быть 100 дорог.
4. В компании 7 человек. Известно, что у каждого человека в компании не менее трёх родственников среди остальных. Доказать, что все семеро — родственники.
5. Дан связный граф на n вершинах. Доказать, что в нём не менее $n - 1$ ребро, а если граф — дерево, то рёбер ровно $n - 1$.
6. В классе больше 30, но меньше 40 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?
7. В классе учатся 30 школьников, причем известно, что каждый дружит с не менее 14 одноклассниками. Доказать, что найдутся четыре ученика, которые все между собой дружат.
8. Каждое из рёбер полного графа с 6 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми – одного цвета.
9. Доказать, что если граф — дерево, то в нём найдётся вершина со степенью 1.
10. Какие-то две команды набрали в круговом (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз) турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся три команды, что первая выиграла у второй, вторая выиграла у третьей, а третья выиграла у первой.
11. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 ребер. Доказать, что он остался связным.
12. Доказать, что существует граф на $2n$ вершинах у которого степени вершин такие: $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.