IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Четвертий тур

Умови задач

Молодша ліга. Група «А»

1. Назвімо число m особливим, якщо можна дібрати такі цілі a та b, що $a^2 - 5b^2 = m$. Скільки існує натуральних чисел, менших від 123 456 789, які є добутком двох особливих чисел, але самі не є особливими?

2. Доведіть, що існують ненульові числа a, b, c, x, y, z, які задовольняють рівності $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ та $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, і знайдіть усі можливі значення виразу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ за умови, що ці рівності справджуються.

3. У трикутнику ABC сторони AB й BC рівні, а кут B дорівнює $20°$. Доведіть, що $2AC < AB < 3AC$.

4. Прямі AD та BC, що містять сторони вписаного чотирикутника $ABCD$, перетинаються в точці O. Нехай точка E симетрична до B відносно точки O, точка F симетрична до B відносно середини відрізка CD, а точка G симетрична до A відносно середини відрізка CE. Доведіть, що точки E, F, G та C лежать на одному колі.

5. Якого максимального значення може набувати найбільший спільний дільник чисел $3n - m$ та $5n + 2m$ за умови, що m та n — взаємно прості натуральні числа?

6. Знайдіть усі пари (m, n) непарних цілих чисел, які задовольняють рівність

$$(2013 - m)^2 + (2013 - n)^2 = (m + n)^2.$$

7. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна повністю замостити фігурками, що мають вигляд, зображений на рис. 1? Кожна клітина фігурки має розмір 1×1. Фігурки можна повертати, але не можна накладати одну на одну або розміщати так, щоб частина фігурки виходила за межі квадрата $n \times n$.

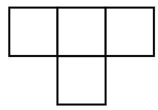

Рис. 1

8. Чи можна з дев'яти чисел $1 + 2 + \ldots + 40$, $41 + 42 + \ldots + 80$, …, $321 + 322 + \ldots + 360$ скласти магічний квадрат 3×3? Нагадаємо, що магічним квадратом називається квадратна табличка з такою властивістю: суми чисел у кожному її рядку, стовпчику і на двох діагоналях однакові.

Молодша ліга. Група «Б»

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює її половині. Знайдіть найменший кут трикутника.

5. На дошці було записано вісім чисел: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 та 16. Петрик витер кілька з них і підрахував добуток чисел, що залишилися. Добуток виявився квадратом деякого цілого числа. Яку найменшу кількість чисел міг витерти з дошки Петрик?

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. На одній відомій картині намальовані 444 бурі ведмеді. Двоє поціновувачів мистецтва грають у гру. Вони по черзі вибирають одного ведмедя та перефарбовують його: якщо ведмідь був бурим, вони забарвлюють його у білий колір, а якщо ведмідь був білим, повертають йому буре забарвлення. Роблячи хід, гравець може вибрати довільного ведмедя (зокрема й уже перефарбованого), але за умови, що після зміни кольору цього ведмедя картина не стане точно такою ж, якою вже колись була: до гри або після одного з попередніх ходів. Якщо комусь із гравців не вдається походити, не порушивши цього правила, він програє. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу? Якщо так, то хто: гравець, що ходить першим, чи його суперник?

8. Іван та Федір вистрілили в мішень по 4 рази кожен. По дві кулі влучили у круги 4 та 9 і по одній у круги 3, 5, 8 і 10 на мішені. Відомо, що Іван за перші три постріли набрав у 7 разів більше очок, ніж за четвертий, а Федір хоча б раз потрапив у круг 9. Хто з хлопців поцілив у десятку?

Молодша ліга. Сьомі класи

1. Знайдіть найбільше значення, якого може набувати вираз при цілих *m* та *n*:

$$\frac{2012}{4m^2+12mn+9n^2+2}.$$

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. У трикутнику *ABC* сторони *AB* й *BC* рівні, а кут *B* дорівнює $20°$. Доведіть, що $AB > 2AC$.

4. *Задача № 4 групи «Б» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «Б» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. У купці лежать 2012 камінців. Двоє гравців ходять по черзі і за один хід роблять на вибір одну з двох дій: або докладають у купку 1 камінець, або, якщо купка складається не менше ніж з 4 камінців, забирають звідти 4 камінці. Запас камінців в обох гравців необмежений. Якщо хтось із гравців під час свого ходу забере з купки 4 камінці і більше камінців у купці не залишиться, цей гравець перемагає. Чи має хтось із гравців виграшну стратегію у такій грі? Якщо так, то хто?

Середня ліга. Група «А»

1. За якого найбільшого значення параметра *k* нерівність справджується для всіх додатних чисел *a* та *b*:

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{a+b} \geqslant (k+2)\sqrt{ab}\ ?$$

2. Яку величину може мати найбільший кут трикутника, якщо його сторони *a*, *b*, *c* задовольняють співвідношення

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c})=\sqrt{2}(a+b+c)\ ?$$

3. Нехай *O* — середина гіпотенузи *AB* прямокутного трикутника *ABC*. На катетах *AC* й *BC* трикутника відмітили відповідно точки *M* та *N*, відмінні від вершин трикутника і такі, що $\angle MON = 90°$. Доведіть, що $AM^2 + BN^2 = MN^2$.

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. Знайдіть усі раціональні корені рівняння $[x](x^2+1)=x^3$, де через $[x]$ позначено цілу частину числа *x* — найбільше ціле число, що не перевищує *x*.

7. У кожній комірці таблиці 5×5 записане число 0. Можна вибрати довільну комірку та збільшити на 1 число, яке стоїть у ній, а також в усіх комірках, що мають із нею спільну сторону. Чи може після певної кількості таких операцій виявитися, що кожне число в таблиці дорівнює 2012?

8. Нехай n — натуральне число, а X_n — множина всіх послідовностей довжини $2n$, що складаються з чисел 0 та 1, за винятком послідовності, що складається тільки з нулів. Доведіть, що множину X_n можна розбити на групи по 3 елементи таким чином, щоб у кожній групі загальна кількість одиниць у послідовностях була парною. Кожна послідовність повинна міститися рівно в одній групі.

Середня ліга. Група «Б»

1. Про числа a, b, c відомо, що $\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c$. Доведіть, що $|a|<c$ та $|b|<c$.

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. Нехай ABC — правильний трикутник зі стороною 4, а O — деяка точка на медіані CM трикутника. Із центром у точці A та радіусом 4 побудували коло ω_1; із центром у точці B й радіусом 2 побудували коло ω_2; нарешті, з центром у точці O побудували коло ω_3 так, щоб воно лежало всередині ω_1, дотикалося до ω_1, а також зовнішнім чином дотикалося до ω_2. Знайдіть радіус кола ω_3.

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «Б» молодшої ліги.*

Старша ліга. Група «А»

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. Петрик задумав 2012 чисел x_1, x_2, …, x_{2012} і порахував для них значення виразу

$$\sum_{i=1}^{2012}\sum_{j=1}^{2012}\min\{i,\ j\}x_i x_j.$$

Яке найменше число могло в результаті вийти у хлопця, якщо відомо, що $x_9=1$?

3. Серединний перпендикуляр до бісектриси AD трикутника ABC перетинає описане коло трикутника в точках K та L. Коло радіуса AK з центром у точці K вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці S, а коло радіуса AL із центром у точці L удруге перетинає описане коло трикутника у точці T. Доведіть, що $\angle BAS=\angle CAT$.

4. Доведіть, що точка Жерґонна, точка Наґеля і точка перетину антибісектрис трикутника лежать на одній прямій.

Точкою Жерґонна називають точку перетину трьох прямих, що сполучають вершини трикутника з точками дотику протилежних сторін до вписаного кола трикутника.

Точкою Наґеля називають точку перетину трьох прямих, що сполучають вершини трикутника з точками дотику до протилежних сторін відповідних зовнівписаних кіл.

Антибісектриса трикутника — це відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні, симетричною відносно середини сторони до основи опущеної на цю сторону бісектриси.

5. Знайдіть усі прямокутні трикутники, сторони яких мають цілі довжини, а площа й периметр збігаються.

6. Чи існує нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n), $n \geqslant 1$, сума квадратів довільної кількості перших членів якої сама є точним квадратом?

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. Кожен із $2n+1$ учнів математичного класу, $n \in \mathbb{N}$, задумав кілька послідовних натуральних чисел. Відомо, що кожен учень має принаймні з n іншими учнями класу хоча б по одному спільному задуманому числу (спільні числа з різними учнями можуть бути різними, а можуть і збігатися). Покажіть, що обов'язково знайдеться такий учень, який має хоча б по одному спільному задуманому числу з усіма учнями класу.

Старша ліга. Група «Б»

1. Для довільних дійсних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} + 1.$$

2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» старшої ліги.*

4. Задано трикутник зі сторонами a, b та c. Розгляньмо три просторові тіла T_a, T_b й T_c, що утворені шляхом обертання трикутника навколо відповідних його сторін. Знайдіть і виразіть відношення об'ємів $V_a : V_b : V_c$ цих тіл через a, b та c.

5. *Задача № 5 групи «А» старшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» старшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «Б» старшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» старшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Відповіді та розв'язання

Молодша ліга. Група «А»

1. ***Відповідь:*** 0.

Розв'язання. Нехай $m = a^2 - 5b^2$, $n = c^2 - 5d^2$ — два особливих числа. Тоді їхній добуток

$$mn = (a^2 - 5b^2)(c^2 - 5d^2) = (ac)^2 + (5bd)^2 - 5(bc)^2 - 5(ad)^2 = (ac + 5bd)^2 - 5(bc + ad)^2 = e^2 - 5f^2$$

теж є особливим числом. Отже, чисел, які є добутком двох особливих чисел, а самі не є особливими, не існує.

2. ***Відповідь:*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = u$, $\frac{c}{z} = -2u$ для деякого числа u. Тоді $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ незалежно від значення u, а $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u} + \frac{1}{-2u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{3}{2}$. У випадку, якщо $u = \frac{3}{2}$, цей добуток дорівнює 1. Отже, будь-яка шістка a, b, c, x, y, z, для якої $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{3}{2}$, а $\frac{c}{z} = -3$, задовольняє обидві рівності. Наприклад, підходить набір чисел $a = b = c = 3$, $x = y = 2$, $z = -1$.

Тепер знайдемо значення виразу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Домноживши рівність $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ на xyz, дістанемо $ayz + bxz + cxy = 0$. А тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 1^2 - 2 \cdot \frac{cxy + ayz + bxz}{abc} = 1.$$

3. ***Розв'язання.*** Доведення нерівності $2AC < AB$ див. у розв'язанні задачі № 3 для сьомих класів.
Для доведення другої частини нерівності добудуємо на відрізках AB та BC трикутники ABD та CBE, рівні трикутнику ABC, причому так, щоб $\angle ABD = \angle CBE = 20°$ (рис. 2). Тоді трикутник DBE рівнобедрений $(BD = BE)$ із кутом $\angle DBE = 3 \cdot 20° = 60°$, тобто він рівносторонній. А значить, $3AC = DA + AC + CE > DE = BD = AB$.

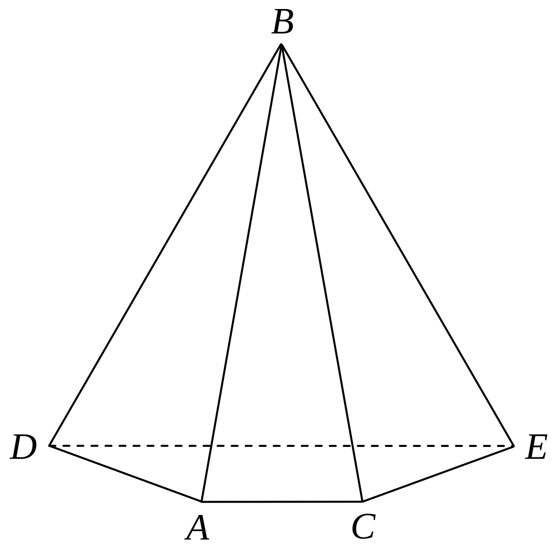

Рис. 2

4. ***Розв'язання.*** Будемо розглядати паралельно два випадки: коли точка O лежить на промені DA (рис. 3) і коли O лежить на промені AD (рис. 4).
Нехай точка H симетрична до A відносно точки O. Чотирикутник $BCFD$ — паралелограм, бо, як випливає з умови задачі, його діагоналі діляться точкою перетину

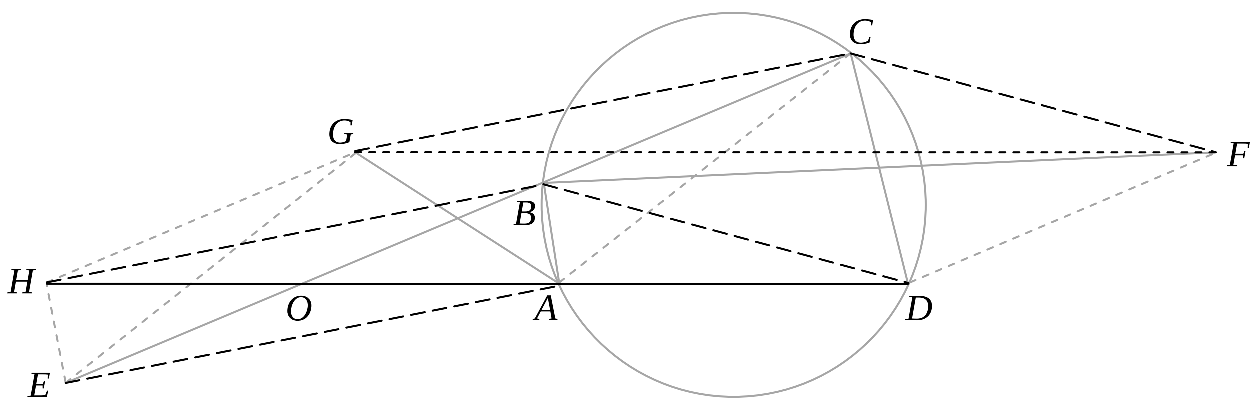

Рис. 3

навпіл. Тому відрізки *BD* та *CF* рівні й паралельні, а промені *BD* та *CF* однаково направлені. Крім того, паралелограмами є *ABHE* та *ACGE*. Тому рівними й паралельними є також відрізки $BH = AE = CG$, а відповідні їм промені однаково направлені. Точка *B* не може лежати на прямій $AD = HD$, тому *HBD* — трикутник. Тоді *GCF* — трикутник, що дорівнює *HBD* за парою паралельних сторін $BD = CF$ та $BH = CG$ і кутом між ними.
Оскільки *ACGE* — паралелограм, $\angle ACE = \angle CEG$. Разом із рівністю трикутників $\Delta GCF = \Delta HBD$ це дає один із двох ланцюжків рівностей: або (у випадку, коли *O* лежить на промені *DA*) $\angle CFG = \angle BDH = \angle BDA = \angle BCA = \angle ACE = \angle CEG$, або (у випадку, коли *O* лежить на промені *AD*) $\angle CFG = \angle BDH = 180° - \angle BDA = 180° - \angle BCA = \angle ACE = \angle CEG$. В обох випадках кути $\angle CFG$ та $\angle CEG$ виявляються рівними.

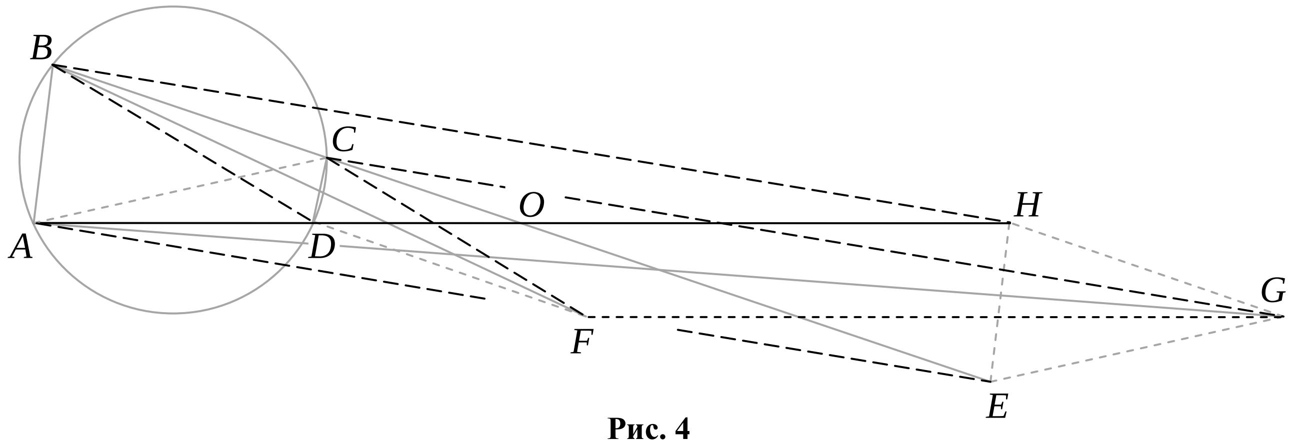

Рис. 4

Для того щоб довести, що *E, F, G* та *C* лежать на одному колі, лишається переконатися, що точки *E* та *F* лежать в одній півплощині відносно прямої *CG*. Для цього зсунемо всі точки в напрямку променя *CB* на відстань *CB*: після такого руху точка *C* перейде в точку *B*, точка *F* — у точку *D* (бо *BCFD* — паралелограм), точка *G* — у точку *H* (бо *BCGH* — паралелограм), а точка *E* — у деяку точку E' на промені *BO*. Зрозуміло, що точки E' та *D* лежать в одній півплощині відносно прямої *BH*, тому й відповідні їм точки *E* та *F* лежать в одній півплощині відносно відповідної прямій *BH* прямої *CG*.

5. ***Відповідь:*** 11.
Розв'язання. Нехай обидва числа $3n - m$ та $5n + 2m$ діляться на певне натуральне число *d*. У такому разі можемо записати, що $3n - m = ad$ і $5n + 2m = bd$ для деяких цілих *a* та *b*. Розв'язавши систему з цих двох рівнянь, дістанемо $n = \frac{d(2a+b)}{11}$ і $m = \frac{d(3b-5a)}{11}$. Якщо $d > 11$, то *m* та *n* матимуть спільний дільник, більший від одиниці: число $\frac{d}{11}$, якщо *d* ділиться на 11, або саме число *d*, якщо воно не ділиться на 11. Але за умовою задачі *m* та *n* взаємно прості, тож $d \leqslant 11$.
Щоб переконатися, що 11 може бути найбільшим спільним дільником чисел $3n - m$ та $5n + 2m$, достатньо підставити $d = 11$, $a = 1$, $b = 2$ й отримати пару взаємно простих натуральних чисел $n = \frac{d(2a+b)}{11} = 4$ та $m = \frac{d(3b-5a)}{11} = 1$, для яких $\text{НСД}(3n - m, 5n + 2m) = \text{НСД}(11, 22) = 11$.

6. ***Відповідь:*** чисел, що задовольняють умову задачі, не існує.
Розв'язання. Нехай $m = 2a + 1$, а $n = 2b + 1$ для деяких цілих *a* та *b*. Крім того, для зручності замість 2013 підставимо вираз $2c + 1$, де $c = 1006$. Тоді рівність $(2013 - m)^2 + (2013 - n)^2 = (m + n)^2$ набуває вигляду

$$((2c+1)-(2a+1))^2 + ((2c+1)-(2b+1))^2 = ((2a+1)+(2b+1))^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2c-2a)^2 + (2c-2b)^2 = (2a+2b+2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (c-a)^2 + (c-b)^2 = (a+b+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2 - 2ac + a^2 + c^2 - 2bc + b^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2c^2 - 2ac - 2bc = 1 + 2ab + 2a + 2b.$$

Але в лівій частині останнього варіанта рівності записане парне число, а у правій частині — непарне, тому рівність справджуватися не може, а чисел m та n, що задовольняють умову задачі, не існує.

7. ***<u>Відповідь:</u>*** для n, що діляться на 4.

<u>Розв'язання.</u> Чотирма фігурками неважко замостити квадрат 4×4 (див. рис. 5), а квадратами 4×4 можна замостити квадрат $n\times n$ для довільного n, що ділиться на 4.

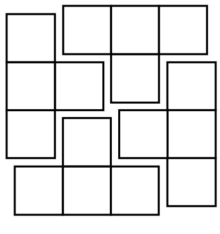

Рис. 5

Далі, одна фігурка містить 4 клітини, тому довільна кількість фігурок займатиме парну кількість клітин. А оскільки для непарних n загальна кількість одиничних клітин у квадраті дорівнює n^2, тобто є непарним числом, то такі n умову не задовольняють.

Залишається розглянути випадок парних n, які не діляться на 4, тобто вигляду $n=4k+2$, де k — ціле невід'ємне число. Кількість клітин у квадраті з такою стороною складає $n^2=16k^2+16k+4$, і, якщо квадрат можна замостити фігурками, їх повинно бути $\frac{n^2}{4}=4k^2+4k+1$ (непарна кількість).

Пофарбуймо кожну клітину квадрата $n\times n$ у білий або в чорний колір у шаховому порядку. Як нескладно зрозуміти, кожна фігурка може покрити або 3 білих клітини й 1 чорну, або 1 білу клітину і 3 чорні. А оскільки фігурок непарна кількість, у сумі вони покриють непарну кількість білих та непарну кількість чорних клітин. У той же час усього маємо по $\frac{n^2}{2}=8k^2+8k+2$, тобто парну кількість, білих та чорних клітин. Отже, при $n=4k+2$ замостити фігурками квадрат неможливо.

8. ***<u>Відповідь:</u>*** можна.

<u>Розв'язання.</u> Кожне з дев'яти чисел можна записати як $(40k-39)+(40k-38)+...+(40k-1)+40k$, $k=1, 2, ..., 9$. Така сума дорівнює

$$(40k-39)+(40k-38)+...+40k=40\cdot 40k-(1+2+...+39)=1600k-\frac{39(39+1)}{2}=1600k-780.$$

Тепер скористаймося тим, що з чисел 1, 2, …, 9 можна скласти магічний квадрат. Шляхом логічних міркувань та перебору його нескладно відновити — див. рис. 6. Помноживши кожне число у квадраті на 1600, знов одержимо магічний квадрат: суми чисел в усіх рядках, стовпчиках і на діагоналях просто збільшаться у 1600 разів. Віднявши тепер від кожного числа у новому квадраті по 780, знов матимемо магічний квадрат: суми чисел в усіх рядках, стовпчиках і на діагоналях зменшаться на одне й те саме число (на $3\cdot780$). Таким чином, ми одержали магічний квадрат, у якому записані потрібні дев'ять чисел: $1600k-780$, $k=1, 2, ..., 9$.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Рис. 6

<u>Молодша ліга. Група «Б»</u>

1. *Задача № 1 групи «А» молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» молодшої ліги.*

4. ***<u>Відповідь:</u>*** 45°.

<u>Розв'язання.</u> У прямокутному трикутнику половині гіпотенузи завжди дорівнює проведена до неї медіана. Щоб у цьому переконатися, візьмемо довільний прямокутний трикутник ABC і прикладемо до його гіпотенузи такий самий трикутник, щоб утворився прямокутник (рис. 7). Діагоналі прямокутника діляться точкою перетину навпіл, тому діагональ, відмінна від гіпотенузи трикутника, є його медіаною, подовженою у два рази. А оскільки діагоналі прямокутника рівні, довжина медіани дорівнює половині довжини гіпотенузи.

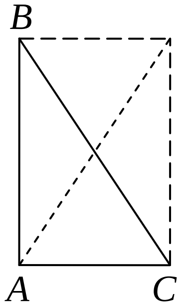

Рис. 7

Це означає, що в умові задачі йдеться про трикутник ABC, висота якого, проведена до гіпотенузи, дорівнює довжині відповідної медіани. Будь-який відрізок, проведений з вершини трикутника до протилежної сторони і відмінний від висоти, має довжину, більшу за довжину висоти, тому медіана AM збігається з висотою трикутника (рис. 8). Тоді трикутники AMB та AMC рівні за двома сторонами та прямим кутом між ними. Отже, рівними є й треті сторони цих трикутників: $AB = AC$. Це означає, що прямокутний трикутник ABC рівнобедрений і, відповідно, його кути дорівнюють $90°$, $45°$ та $45°$.

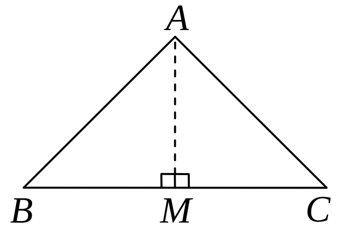

Рис. 8

5. ***<u>Відповідь:</u>*** 3 числа.

<u>Розв'язання.</u> Петрик мав витерти число 10, бо воно єдине з усіх ділиться на просте число 5, до того ж тільки у першому степені: інакше добуток чисел, що залишилися на дошці, також ділився б на 5, але не ділився б на 5^2, чого у випадку з квадратом цілого числа бути не може. З аналогічних міркувань для числа 14, яке єдине з усіх ділиться на 7, але не ділиться на 7^2, випливає, що Петрик мав витерти також і це число. Добуток решти шести чисел дорівнює

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 2^4 = 2^{13} \cdot 3^2.$$

Оскільки степінь двійки у розкладі добутку на прості множники дорівнює 13, тобто непарний, цей добуток не є квадратом. Тож Петрик мав витерти бодай іще одне число. З іншого боку, якщо він витер ще число 2, добуток п'яти чисел, що залишилися на дошці, дорівнював $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 = 2^{12} \cdot 3^2$ і був квадратом числа $2^6 \cdot 3$. Отже, хлопець міг витерти 3 числа або більше.

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. ***<u>Відповідь:</u>*** перемагає гравець, що ходить першим.

<u>Розв'язання.</u> Перший гравець може вибрати певного ведмедя та під час кожного свого ходу змінювати його забарвлення. Покажімо, що, завжди роблячи хід саме в такий спосіб, перший гравець ніколи не порушить правил.

Оскільки в результаті довільного ходу кількість білих ведмедів змінюється на 1, після кожного ходу першого гравця кількість білих ведмедів буде непарною, а після кожного ходу другого (і перед початком гри) — парною. Тому, якщо після n-го ходу першого гравця картина стане такою, якою була раніше, це означатиме, що й уперше розфарбування, яке повторилося, виникло після ходу саме першого гравця — скажімо, після його m-го ходу. Але й під час n-го, і під час m-го ходу перший гравець змінював колір одного й того самого вибраного ним ведмедя, тому і перед його n-м та m-м ходами картина мала однаковий вигляд. Тож якби перший гравець своїм n-м ходом порушив правила, то з цього випливало б, що другий гравець порушив правила вже під час свого попереднього, $(n-1)$-го ходу.

Залишається додати, що кількість різних розфарбувань ведмедів скінченна (2^{444}) і кожне розфарбування може з'явитися не більше ніж один раз. Тому неодмінно настане такий момент, коли один із гравців не зможе походити. А оскільки перший гравець, як ми показали, зробити хід може завжди, поразки зазнáє його суперник.

8. ***<u>Відповідь:</u>*** Федір.

<u>Розв'язання.</u> Оскільки принаймні одну кулю, яка потрапила в дев'ятку, випустив Федір, Іван за перші три постріли міг набрати щонайбільше $10 + 9 + 8 = 27$ очок. Тому останній постріл не міг принести йому 4 чи більше очок. Значить, останнім своїм пострілом Іван поцілив у круг 3. Тоді решта його пострілів дали хлопцю $7 \cdot 3 = 21$ очко. Залишається з шести чисел 4, 4, 5, 8, 9 і 10 вибрати три, сума яких дорівнює 21.

Якщо серед вибраних трьох чисел не буде числа 4, то найменша сума, яку вони можуть мати, дорівнює $5 + 8 + 9 = 22 > 21$. Значить, у трійці є число 4 і два числа з набору 4, 5, 8, 9, 10, сума яких дає $21 - 4 = 17$. Такими числами, як нескладно бачити, можуть бути тільки 8 і 9. Отже, Іван влучив у круги 3, 4, 8 і 9, а Федір — у круги 4, 5, 9 і, власне, у круг 10.

<u>Молодша ліга. Сьомі класи</u>

1. ***<u>Відповідь:</u>*** 1006.

<u>Розв'язання.</u> Вираз $4m^2 + 12mn + 9n^2 + 2 = (2m + 3n)^2 + 2$ не менший за 2 і дорівнює 2, коли

$2m+3n=0$: якщо, скажімо, $m=3$ та $n=-2$.

Дріб $\dfrac{2012}{4m^2+12mn+9n^2+2}$ набуває найбільшого значення, коли його знаменник найменший, тобто рівний 2. Дріб при цьому дорівнює $\dfrac{2012}{2}=1006$.

2. *Задача № 2 групи «А» молодшої ліги.*

3. Оскільки трикутник ABC рівнобедрений, $\angle A=\angle C=(180^\circ-\angle B)/2=80^\circ$. Позначимо на стороні AB трикутника точку D в такий спосіб, щоб $\angle ACD=50^\circ$ (рис. 9). Тоді $\angle ADC=180^\circ-\angle CAD-\angle ACD=50^\circ=\angle ACD$, звідки $AD=AC$. У той же час $\angle BCD=\angle ACB-\angle ACD=30^\circ>\angle CBD$. Враховуючи, що навпроти більшого кута лежить більша сторона трикутника, з трикутників BCD та ACD маємо $BD>CD>AC$. А тоді $AB=AD+BD=AC+BD>2AC$.

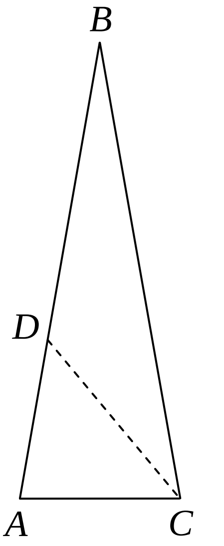

Рис. 9

4. *Задача № 4 групи «Б» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «Б» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «Б» молодшої ліги.*

8. ***Відповідь:*** перемагає гравець, що ходить першим.
Розв'язання. У першого гравця є виграшна стратегія. Початковим своїм ходом він має докласти в купку камінець, а далі діятиме залежно від ходів суперника. Якщо суперник під час свого ходу забирає з купки 4 камінці, перший гравець має докласти туди камінець, а якщо суперник кладе в купку камінець, перший гравець повинен узяти з неї 4 камінці. Так він досягне того, що після кожного наступного його ходу в купці буде на 3 камінці менше: після першого ходу купка міститиме 2013 камінців, після другого — 2010 камінців, після третього — 2007 і т. д. Оскільки число 2013 кратне 3, зрештою в купці опиняться 12, 9, 6 і нарешті 3 камінці. Далі другий гравець муситиме докласти в купку 1 камінець, а перший забере всі 4 камінці і виграє.

Середня ліга. Група «А»

1. ***Відповідь:*** 6.
Розв'язання. Проведімо низку перетворень нерівності:

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{a+b}\geqslant(k+2)\sqrt{ab}\iff 2(a^2+kab+b^2)\geqslant(a+b)(k+2)\sqrt{ab}\iff$$
$$\iff\frac{2(a^2+kab+b^2)}{b^2}\geqslant\frac{(a+b)(k+2)\sqrt{ab}}{b^2}\iff 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{ka}{b}+1\right)\geqslant\left(\frac{a}{b}+1\right)(k+2)\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Позначивши число $\sqrt{\dfrac{a}{b}}>0$ через x, одержимо $2(x^4+kx^2+1)\geqslant(x^2+1)(k+2)x$. Ця нерівність справджується для всіх додатних x у тому й лише в тому випадку, якщо початкова нерівність виконується для будь-яких додатних чисел a та b, адже для довільного $x>0$ існують такі додатні a та b, що $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=x$. Далі:

$$2(x^4+kx^2+1)\geqslant(x^2+1)(k+2)x\iff 2(x^4+1)+2kx^2\geqslant k(x^2+1)x+2(x^2+1)x\iff$$
$$\iff 2(x^4+1)-2(x^2+1)x\geqslant k((x^2+1)x-2x^2)\iff 2(x^4-x^3-x+1)\geqslant kx(x^2-2x+1)\iff$$
$$\iff 2(x^3(x-1)-(x-1))\geqslant kx(x-1)^2\iff 2(x-1)(x^3-1)\geqslant kx(x-1)^2\iff$$
$$\iff 2(x-1)^2(x^2+x+1)\geqslant kx(x-1)^2.$$

Якщо $x=1$, нерівність, очевидно, є правильною незалежно від значення k. Тому нас цікавить найбільше значення параметра, за якого $2(x^2+x+1)\geqslant kx$ для всіх додатних x, відмінних від 1. Поділивши на x, матимемо $2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant k$. Оскільки $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$, при $k=6$ нерівність справедлива.

Хай тепер $k>6$. Покажімо, що існує таке додатне x, відмінне від 1, при якому нерівність порушується. Для цього розв'яжемо рівняння $2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{k+6}{2}$. Зауважимо, що $6<\frac{k+6}{2}<k$. Отже, знайшовши додатний розв'язок рівняння, відмінний від 1, ми доведемо, що найбільше значення параметра k, яке задовольняє умову задачі, — це 6.

$$2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{k+6}{2}\Leftrightarrow 2x^2+\left(2-\frac{k+6}{2}\right)x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{\frac{k+6}{2}-2\pm\sqrt{(\frac{k+6}{2}-2)^2-16}}{4}.$$

Дискримінант рівняння $\left(\frac{k+6}{2}-2\right)^2-16>(6-2)^2-16=0$ додатний. Отже, маємо корінь

$$x=\frac{\frac{k+6}{2}-2+\sqrt{(\frac{k+6}{2}-2)^2-16}}{4}>\frac{\frac{k+6}{2}-2}{4}>\frac{6-2}{4}=1.$$

Дещо простіше показати, що k не перевищує 6, можна з допомогою поняття неперервності функції. Функція $f(x)=2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$ неперервна на проміжку $[1,+\infty)$, тому при $x>1$ набуває значень, як завгодно близьких до $f(1)=6$. Тож для будь-якого $k>6$ існує таке додатне $x\neq 1$, що $f(x)<k$.

2. ***<u>Відповідь</u>:*** $90°$.

<u>Розв'язання</u>. Піднесімо задане співвідношення до квадрата:

$$(2a+2\sqrt{a^2-b^2})(2a+2\sqrt{a^2-c^2})=2(a+b+c)^2.$$

Якщо припустити, що $a^2>b^2+c^2$, можемо вивести

$$(2a+2\sqrt{a^2-b^2})(2a+2\sqrt{a^2-c^2})>(2a+2c)(2a+2b)=$$
$$=2(2a^2+2ab+2ac+2bc)>2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)=2(a+b+c)^2.$$

Це суперечить одержаній вище рівності. Так само, якщо припустити, що $a^2<b^2+c^2$ (але за умов $a\geqslant b$ та $a\geqslant c$, які випливають з формулювання задачі), матимемо

$$(2a+2\sqrt{a^2-b^2})(2a+2\sqrt{a^2-c^2})<(2a+2c)(2a+2b)=$$
$$=2(2a^2+2ab+2ac+2bc)<2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)=2(a+b+c)^2.$$

Це також не узгоджується з рівністю $(2a+2\sqrt{a^2-b^2})(2a+2\sqrt{a^2-c^2})=2(a+b+c)^2$. Отже, єдиний варіант, за якого співвідношення може виконуватися, — якщо $a^2=b^2+c^2$, тобто коли трикутник прямокутний, а його найбільший кут дорівнює $90°$.

Переконаємося, що прямокутний трикутник, який задовольняє умову задачі, існує. Для цього підставмо, приміром, $a=5$, $b=4$, $c=3$:

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c})=(\sqrt{9}+\sqrt{1})(\sqrt{8}+\sqrt{2})=4\cdot 3\sqrt{2}=\sqrt{2}(a+b+c).$$

3. ***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай точка P симетрична до M відносно точки O (рис. 10). Тоді $\Delta AOM=\Delta BOP$ за двома сторонами $AO=BO$ та $OM=OP$ і кутом між ними. Звідси

$$\angle PBN=\angle PBO+\angle ABC=\angle MAO+\angle ABC=90°.$$

Це означає, що трикутник PBN прямокутний, тобто

$$AM^2+BN^2=BP^2+BN^2=PN^2.$$

Крім того, NO — серединний перпендикуляр до відрізка PM, тому що $OM=OP$ за побудовою і $\angle MON=90°$ за умовою. Отже, $PN=MN$, а $AM^2+BN^2=PN^2=MN^2$, що й потрібно було довести.

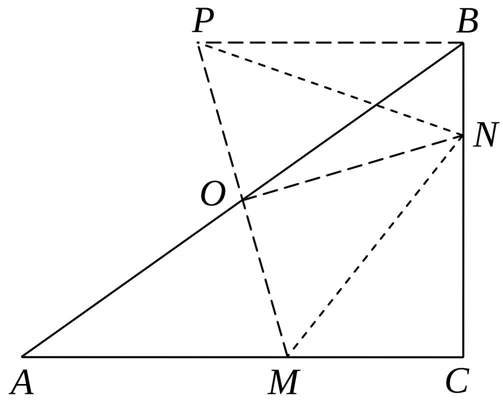

Рис. 10

4. *Задача № 4 групи «А» молодшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. ***<u>Відповідь:</u>*** $x = 0$.

<u>Розв'язання</u>. Якщо x ціле, то $[x] = x$, тож у цьому випадку

$$[x](x^2+1) = x^3 \iff x(x^2+1) = x^3 \iff x = 0.$$

Нехай тепер $x = \dfrac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне й більше від 1, причому m та n взаємно прості. Хай також $[x] = k$. Тоді рівняння $[x](x^2+1) = x^3$ набуває вигляду

$$k\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right) = \frac{m^3}{n^3} \iff kn(m^2+n^2) = m^3.$$

Отже, $m^3 \vdots n$, а зважаючи, що $n > 1$, числа m та n мають спільний простий дільник і не можуть бути взаємно простими. Таким чином, нецілих раціональних коренів рівняння не має.

7. ***<u>Відповідь:</u>*** не може.

<u>Розв'язання</u>. Уявімо, що, коли ми збільшуємо число в клітинці на перетині i-го рядка та j-го стовпчика на 1, нам нараховують x_{ij} очок, де набір чисел x_{11}, x_{12}, …, x_{15}, x_{21}, …, x_{55} фіксований. Задача — підібрати числа x_{11}, x_{12}, …, x_{55} таким чином, щоби справджувалися дві умови:

— Незалежно від того, яку комірку вибрати для ходу, сумарна кількість очок, яку ми отримуємо за одну операцію, завжди однакова і дорівнює деякому числу m.

— Зрозуміло, що якщо в кожній клітинці опиниться число 2012, то загальна кількість набраних очок складатиме $2012(x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{55})$. Треба підібрати числа так, щоб ця кількість не ділилася на m.

За припущення, що в кожній клітинці опиниться число 2012, разом ці дві умови, очевидно, приводять до суперечності. Тому якщо нам удасться знайти відповідний набір чисел, то задачу буде розв'язано.

Пошук вестимемо, припустивши, що набір чисел x_{11}, x_{12}, …, x_{55} повністю симетричний, а для більшої наочності позначимо число x_{11} через a, x_{21} через b, x_{22} через c, x_{31} через d, x_{32} через e і, нарешті, x_{33} через f — на рис. 11 у кожній комірці таблиці записано кількість очок, яку їй таким чином присвоїмо. Якщо під час ходу ми виберемо комірку, де записано число a, нам буде нараховано $a+2b$ очок; якщо комірку, де стоїть b, — $a+b+c+d$ очок; якщо клітинку з числом c — $2b+c+2e$ очок; якщо комірку з d — $2b+d+e$ очок; якщо з e — $2c+d+e+f$ очок; якщо з f — $4e+f$ очок. Загальна ж сума чисел x_{11}, x_{12}, …, x_{55} складає $S = 4a+8b+4c+4d+4e+f$. Розв'язавши шляхом спрощень і підстановок систему рівнянь $a+2b = a+b+c+d = 2b+c+2e = 2b+d+e = 2c+d+e+f = 4e+f = m$, матимемо: $a = \dfrac{4m}{11}$, $b = \dfrac{7m}{22}$, $c = \dfrac{m}{11}$, $d = \dfrac{5m}{22}$, $e = \dfrac{3m}{22}$, $f = \dfrac{5m}{11}$, $S = \dfrac{69m}{11}$. Залишається підставити, наприклад, $m = 22$ і переконатися, що число $2012S = 2012 \cdot 2 \cdot 69$ не ділиться на 22.

a	b	d	b	a
b	c	e	c	b
d	e	f	e	d
b	c	e	c	b
a	b	d	b	a

Рис. 11

8. ***<u>Розв'язання</u>.*** Доведімо твердження з допомогою методу математичної індукції. Якщо $n = 1$, множина $X_n = X_1$ складається з трьох послідовностей: 01, 10 та 11. Загальна кількість одиниць у послідовностях парна, тому єдине можливе «розбиття» послідовностей на трійки, яке всі три послідовності відносить до єдиної групи, задовольняє умову задачі.

Проведімо тепер індукційний перехід. Розгляньмо довільну групу, що утворилася внаслідок розбиття послідовностей довжини $2n$ — деяку трійку послідовностей $a_1a_2\ldots a_{2n}$, $b_1b_2\ldots b_{2n}$, $c_1c_2\ldots c_{2n}$. Утворимо з неї чотири групи послідовностей довжини $2n+2$:

1) $a_1a_2\ldots a_{2n}00$, $b_1b_2\ldots b_{2n}00$, $c_1c_2\ldots c_{2n}00$;

2) $a_1a_2\ldots a_{2n}01$, $b_1b_2\ldots b_{2n}10$, $c_1c_2\ldots c_{2n}11$;

3) $a_1a_2\ldots a_{2n}10$, $b_1b_2\ldots b_{2n}11$, $c_1c_2\ldots c_{2n}01$;

4) $a_1a_2\ldots a_{2n}11$, $b_1b_2\ldots b_{2n}01$, $c_1c_2\ldots c_{2n}10$.

Як видно, кількість одиниць у кожній групі або не змінилася, або збільшилася на 4, тобто лишилася парною. Крім того, розглянемо ще одну трійку послідовностей довжини $2n+2$:

$$5)\quad \underbrace{00...0}_{2n}01,\ \underbrace{00...0}_{2n}10,\ \underbrace{00...0}_{2n}11.$$

Кількість одиниць у цій трійці дорівнює 4 і також парна.

Кожна виписана вище послідовність складається, очевидно, з нулів та одиниць. Крім того, жодна не складається виключно з нулів: в усіх групах, крім трійок типу 1, одиниці записані безпосередньо на одному з двох останніх місць, а для групи типу 1 кожна з трьох послідовностей $a_1a_2...a_{2n}$, $b_1b_2...b_{2n}$, $c_1c_2...c_{2n}$ містить принаймні одну одиницю, бо належить до множини X_n.

Покажемо тепер, що довільна послідовність $x_1x_2...x_{2n+2} \in X_{n+1}$ входить рівно в одну з виписаних груп. Розгляньмо її підпослідовність $x_1x_2...x_{2n}$. Якщо вона містить лише нулі, то послідовність $x_1x_2...x_{2n+2}$ входить до трійки 5 і тільки до неї. В іншому разі трійці 5 вона точно не належить, а з груп типів 1—4 входить до однієї: четвірку груп визначають перші $2n$ чисел $x_1x_2...x_{2n}$ послідовності, а конкретну з чотирьох груп — два останніх числа $x_{2n+1}x_{2n+2}$.

Середня ліга. Група «Б»

1. ***Розв'язання.*** Скористаймося властивостями модуля:

$$|a| = \left|\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c,$$

$$|b| = \left|\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c.$$

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. ***Відповідь:*** 1.

Розв'язання. Зрозуміло, що $AO = BO$ (рис. 12). Нехай коло ω_3 дотикається до ω_1 у точці *K*, а до ω_2 — у точці *L*. Пряма, що сполучає центри кіл, проходить через точку їхнього дотику, тому *K* лежить на *AO*, а *L* — на *BO*. При цьому $AK - OK = AO = BO = BL + OL$.

Оскільки *K* лежить на ω_1, а *L* — на ω_2, то $AK = 4$ та $BL = 2$. Крім того, радіус кола ω_3 дорівнює $r = OK = OL$. Тож маємо рівняння $4 - r = 2 + r$, звідки $r = 1$.

Коло ω_3, про яке йдеться в умові задачі, існує: якщо за його центр узяти точку *O*, для якої $AO = BO = 3$ (така на відрізку *CM* є, бо $AM < 3 < AC$) і покласти $r = 1$, матимемо, що $AO = 4 - r$ та $BO = 2 + r$, тобто коло лежатиме всередині ω_1 і дотикатиметься до нього, а також дотикатиметься зовнішнім чином до ω_2.

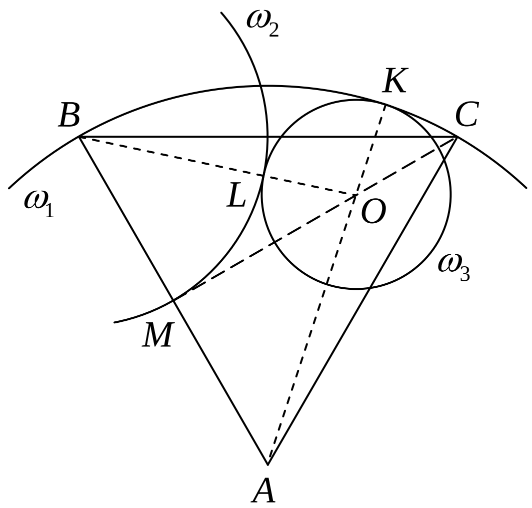

Рис. 12

Зауважимо, що інформація про спосіб дотику кіл, наведена в умові задачі, є надлишковою, бо в інший спосіб кола дотикатися не можуть: це можна показати з допомогою схожих міркувань. Умову сформульовано таким чином для того, щоб спростити задачу.

5. *Задача № 5 групи «А» молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «Б» молодшої ліги.*

<u>Старша ліга. Група «А»</u>

1. *Задача № 1 групи «А» середньої ліги.*

2. ***<u>Відповідь:</u>*** $\frac{1}{2}$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $f(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{i,\ j\}x_i x_j$. Можна знайти

$$f(1)=x_1^2,\ \ f(2)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=(x_1+x_2)^2+x_2^2,$$

а далі припустити, що

$$f(n)=(x_1+x_2+...+x_n)^2+(x_2+x_3+...+x_n)^2+...+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2.$$

І справді, коефіцієнт перед членом x_i^2 у сумі $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{i,\ j\}x_i x_j$ дорівнює $\min\{i,i\}=i$ — кількості дужок вищенаведеного виразу, в яких присутнє число x_i. А коефіцієнт перед членом $x_i x_j$, $i<j$, дорівнює (враховуючи, що таких членів два) $\min\{i,\ j\}+\min\{j,i\}=2i$. Тобто він удвічі більший за кількість дужок, у яких присутні водночас числа x_i та x_j. Залишається пригадати формулу для квадрата суми кількох чисел:

$$(a_1+a_2+...+a_m)^2=a_1^2+a_2^2+...+a_m^2+2a_1a_2+2a_1a_3+...+2a_1a_m+2a_2a_3+...+2a_{m-1}a_m.$$

Таким чином,

$$f(2012)=(x_1+x_2+...+x_{2012})^2+...+(x_{2011}+x_{2012})^2+x_{2012}^2\geqslant$$

$$\geqslant(x_9+x_{10}+...+x_{2012})^2+(x_{10}+x_{11}+...+x_{2012})^2=(1+s)^2+s^2=2s^2+2s+1=2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}.$$

А якщо ми покладемо $x_8=x_{10}=-\frac{1}{2}$, $x_1=x_2=...=x_7=x_{11}=x_{12}=...=x_{2012}=0$, то матимемо, що всі суми, які містять водночас числа x_8, x_9 та x_{10} або не містять жодного з них, дорівнюють нулю, а $s=x_{10}+x_{11}+...+x_{2012}=-\frac{1}{2}$. Отже, при таких значеннях змінних $f(2012)=\frac{1}{2}$.

3. ***<u>Розв'язання</u>.*** *KL* — серединний перпендикуляр до *AD*, тому $DK=AK$, $DL=AL$, а $\Delta KAL=\Delta KDL$ за трьома сторонами (рис. 13). Звідси $\angle KLA=\angle KLD$. Продовжмо відрізок *LD* до перетину з описаним колом трикутника *ABC* у деякій точці S'. Оскільки $\angle KLA=\angle KLS'$, то рівними є й хорди, які стягують ці кути: $AK=S'K$. Це означає, що точка S' лежить на колі радіуса *AK* з центром у точці *K*, тобто $S'=S$. Із того, що $DK=AK$, випливає, що точка *D* також лежить на цьому колі, причому точки *A* та *K* лежать, очевидно, по один бік від прямої $SD=SL$. Тож із теореми про співвідношення між уписаним і центральним кутами $\angle SAD=\angle SKD/2$. Цілком аналогічно доводиться, що $\angle TAD=\angle TLD/2$. А враховуючи, що точки *K*, *D* й *T*, як і точки *L*, *D* та *S*, лежать на одній прямій, маємо ще й $\angle SKD=\angle SKT=\angle TLS=\angle TLD$. Отже,

$$\angle SAD=\angle SKD/2=\angle TLD/2=\angle TAD.$$

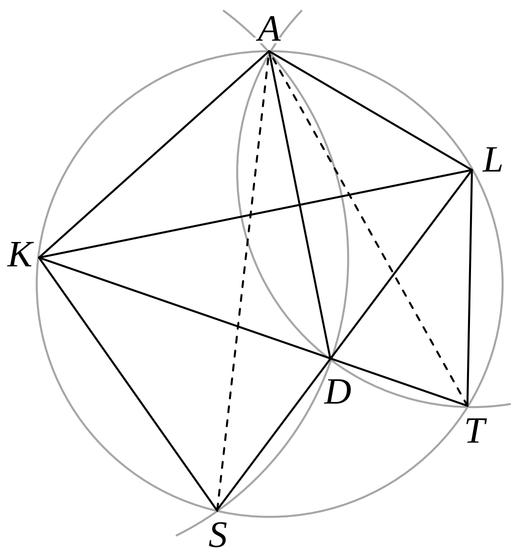

Рис. 13

Залишається скористатися тим, що *AD* — бісектриса кута *BAC*. Якщо точки *B* та *C* лежать із тих же боків відносно *AD*, що відповідно точки *S* і *T*, маємо рівність

$$\angle BAS=|\angle BAD-\angle SAD|=|\angle CAD-\angle TAD|=\angle CAT.$$

Якщо ж *B* лежить із того боку, що *T*, а *C* — із того боку, що *S*, то також

$$\angle BAS=\angle BAD+\angle SAD=\angle CAD+\angle TAD=\angle CAT.$$

4. ***Розв'язання.*** Хай сторони трикутника дорівнюють a, b та c, вписане коло дотикається до сторін трикутника у точках A_1, B_1, C_1, а зовнівписані кола — у точках A_2, B_2, C_2 (рис. 14). Нехай також відрізок CC_3 — бісектриса трикутника, а відрізок CC_4 — його антибісектриса (рис. 15).

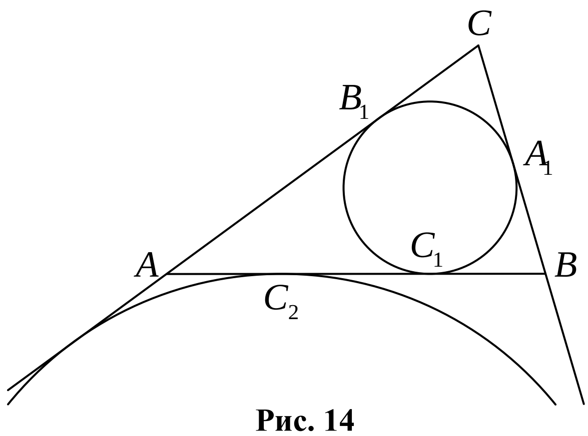

Рис. 14

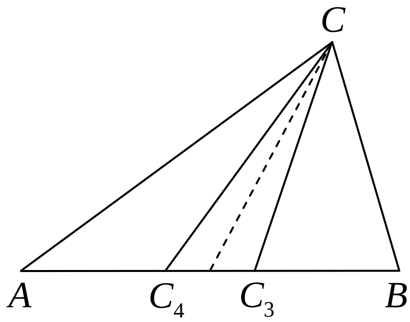

Рис. 15

Якщо позначити дотичні до вписаного кола, проведені з вершин трикутника ABC, через $AB_1 = AC_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$, $CA_1 = CB_1 = z$, матимемо систему рівнянь $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, звідки

$$AB_1 = AC_1 = x = (-a + b + c)/2,$$
$$BA_1 = BC_1 = y = (a - b + c)/2,$$
$$CA_1 = CB_1 = z = (a + b - c)/2.$$

Крім того, якщо дотичні до зовнівписаного кола (того, що на рис. 14), проведені з вершин A та B, позначити через s і t відповідно, дістанемо $s + t = c$ і $b + s = a + t$ (бо дотичні до зовнівписаного кола, проведені з вершини C, також рівні). Звідси

$$AC_2 = s = (a - b + c)/2,$$
$$BC_2 = t = (-a + b + c)/2.$$

Далі застосуємо міркування геометрії мас.

Спершу розмістімо в точках A, B, C відповідно маси $(a+b+c)(-a+b+c)$, $(a+b+c)(a-b+c)$, $(a+b+c)(a+b-c)$. Відношення мас у точках A та B дорівнює $\dfrac{-a+b+c}{a-b+c} = \dfrac{BC_2}{AC_2}$. Тому центр мас точок A і B лежить у точці C_2, а центр мас трикутника — на відрізку CC_2. З аналогічних міркувань центр мас трикутника лежить на відрізках AA_2 та BB_2, тому він збігається з точкою Наґеля.

Тепер розмістімо в точках A, B й C відповідно маси $(a-b+c)(a+b-c)$, $(-a+b+c)(a+b-c)$, $(-a+b+c)(a-b+c)$. Відношення мас у точках A та B дорівнює $\dfrac{a-b+c}{-a+b+c} = \dfrac{BC_1}{AC_1}$. Тому центр мас точок A і B лежить у точці C_1, а центр мас трикутника — на відрізку CC_1. Аналогічно центр мас трикутника лежить на відрізках AA_1 та BB_1, тож він збігається з точкою Жерґонна.

Нарешті, розмістімо в точках A, B, C відповідно маси

$$(a+b+c)(-a+b+c) + (a-b+c)(a+b-c) = 4bc,$$
$$(a+b+c)(a-b+c) + (-a+b+c)(a+b-c) = 4ca,$$
$$(a+b+c)(a+b-c) + (-a+b+c)(a-b+c) = 4ab.$$

Тоді, з одного боку, центр мас трикутника повинен лежати на відрізку, що сполучає точку Наґеля з точкою Жерґонна (або, якщо вони збігаються, збігатися з ними обома). З іншого боку, відношення мас у точках A та B дорівнює $\dfrac{4bc}{4ca} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AC_3}{BC_3} = \dfrac{BC_4}{AC_4}$. Тому центр мас точок A і B лежить у точці C_4, а центр мас трикутника — на антибісектрисі CC_4. Аналогічно центр мас трикутника лежить на двох інших антибісектрисах, тож він збігається з точкою перетину антибісектрис трикутника. А це значить, що точка перетину антибісектрис розташована разом із точками Наґеля та Жерґонна на одній прямій.

Зауважимо, що знайти трійки мас, які приводять до потрібного результату, можна, позначивши їх деякими змінними і розв'язавши відносно цих змінних відповідну систему рівнянь. У системі слід врахувати, якими мають бути співвідношення між кожними двома масами, що належать одній трійці, а також те, якими повинні бути відношення сум відповідних мас обох трійок.

5. ***Відповідь:*** трикутники зі сторонами 5, 12, 13 та 6, 8, 10.

Розв'язання. Позначимо катети як a та b, а гіпотенузу — як c. Периметр трикутника дорівнює $a+b+c$, а його площа складає $\frac{ab}{2}$. Тож маємо рівність $a+b+c=\frac{ab}{2}$, звідки

$$2c = ab - 2(a+b) \;\Rightarrow\; 4c^2 = (ab-2(a+b))^2 = (ab)^2 - 4ab(a+b) + 4(a+b)^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 4c^2 = (ab)^2 - 4ab(a+b) + 4a^2 + 8ab + 4b^2 .$$

А оскільки трикутник прямокутний і $c^2 = a^2 + b^2$, рівність перетворюється на таку:

$$(ab)^2 - 4ab(a+b) + 8ab = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; ab - 4(a+b) + 8 = 0 \;\Rightarrow\; (a-4)(b-4) = 8 .$$

Таким чином, числа $a-4$ та $b-4$ мають бути дільниками числа 8, причому, оскільки a і b додатні, ці числа більші за -4: вони дорівнюють -2, -1, 1, 2, 4 або 8. Як видно, добуток двох таких чисел дорівнює 8, тільки якщо одне з них дорівнює 1, а інше 8, або якщо одне з них — 2, а інше — 4. Перший варіант дає трикутник зі сторонами 5, 12 і $\sqrt{5^2+12^2}=13$, а другий варіант — трикутник зі сторонами 6, 8 і $\sqrt{6^2+8^2}=10$. Шляхом безпосередньої перевірки нескладно переконатися, що обидва трикутники справді задовольняють умову задачі.

6. ***Відповідь:*** існує.

Розв'язання. Послідовності додатних дійсних чисел (a_n) і (s_n), $n \in \mathbb{N}$, назвімо узгодженими, якщо $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = s_n^2$, $n \geqslant 1$. Коли дві послідовності узгоджені, то для довільного $n \geqslant 1$

$$s_n^2 = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n+1}^2) - a_{n+1}^2 = s_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = (s_{n+1} - a_{n+1})(s_{n+1} + a_{n+1}) .$$

І навпаки, якщо для всіх $n \geqslant 1$ справедливою є рівність $(s_{n+1} - a_{n+1})(s_{n+1} + a_{n+1}) = s_n^2$ і $s_1^2 = a_1^2$, то й (за індукцією) $s_{n+1}^2 = s_n^2 + a_{n+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1}^2$. Тоді можна сконструювати пару узгоджених послідовностей таким чином: для всіх $n \geqslant 1$ покласти $s_{n+1} = \frac{s_n^2+1}{2}$ та $a_{n+1} = \frac{s_n^2-1}{2}$, а перші члени взяти рівними, приміром, $s_1 = a_1 = 3$. Послідовність (s_n), задана в такий спосіб, складається з непарних натуральних чисел, більших за 1: перший її член є таким числом, а якщо таким є член s_n, то

$$s_n^2 + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4 \;\Rightarrow\; s_{n+1} = \frac{s_n^2+1}{2} \equiv 1 \pmod 2;\; \frac{s_n^2+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1 .$$

Тому й послідовність (a_n) складається з натуральних чисел, а суми квадратів її перших членів — це квадрати натуральних чисел з послідовності (s_n).

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. ***Розв'язання.*** З умови випливає, що кожен учень задумав принаймні одне число. Нехай a_i — найменше, а b_i — найбільше з усіх чисел, які задумав i-й учень. Нехай також a_M — найбільше з чисел a_i, а b_m — найменше з чисел b_i. Якщо $a_M \leqslant b_m$, то кожен учень задумав обидва цих числа, адже $a_i \leqslant a_M \leqslant b_m \leqslant b_i$ для будь-якого i. Тоді кожен учень має спільне задумане число з кожним іншим учнем класу.

Хай тепер $b_m < a_M$. У цьому разі $m \neq M$, бо найбільше число, яке задумав учень, не може бути меншим за найменше задумане ним число. За умовою учнів, які мають із учнем m спільне задумане число, не менше за n. Позначимо множину цих учнів через C_m. Не менше за n і таких учнів, які мають спільне задумане число з учнем M — їх позначимо через C_M. З нерівності $b_m < a_M$ випливає, що $M \notin C_m$ і $m \notin C_M$. Тож якби множини C_m і C_M не містили бодай одного спільного числа, то всього в цих множинах було б не менше за $2n$ учнів, а разом із учнями m та M ми мали би принаймні $2n+2 > 2n+1$ учня, що суперечить умові задачі. Таким чином, є певний учень k, який належить обом множинам, тобто має спільне задумане число з обома учнями m та M. Це означає, що $a_k \leqslant b_m < a_M \leqslant b_k$.

Припустімо, існує учень i, який не має спільних задуманих чисел з учнем k. Тоді або $b_i < a_k$, або

$b_k < a_i$. Але в першому випадку $b_i < a_k \leqslant b_m \Rightarrow b_i < b_m$, а у другому — $a_M \leqslant b_k < a_i \Rightarrow a_M < a_i$, що так чи інакше суперечить вибору одного з чисел a_M чи b_m. Отже, учень *k* має спільні задумані числа з усіма іншими учнями класу.

Старша ліга. Група «Б»

1. *Розв'язання.* Під час розв'язання ми використаємо нерівність $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$, яка справджується для всіх дійсних *x*, *y* і *z*. Її можна довести, склавши тривіальні нерівності $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$, $z^2 + x^2 \geqslant 2zx$ і поділивши суму на 2.

Без обмеження загальності вважатимемо, що $a \leqslant b \leqslant c$ і, отже, $\max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} = c - a$. Позначивши ліву частину нерівності, яку слід довести, через *S*, запишемо таке:

$$S - 1 = ab + bc + ca + c - a - 1 = (a+1)b + b(c-1) + (c-1)(a+1) \leqslant (a+1)^2 + b^2 + (c-1)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - c + 1) = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca + c - a - 1) = (a+b+c)^2 - 2(S-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3(S-1) \leqslant (a+b+c)^2 \Rightarrow S \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} + 1,$$

що й потрібно було показати.

2. *Задача № 2 групи «А» старшої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» старшої ліги.*

4. *Відповідь:* $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Розв'язання. Як відомо, об'єм конуса дорівнює одній третій добутку площі його основи на висоту. Позначмо через h_a довжину висоти, опущеної на сторону *a* трикутника. Тіло обертання T_a залежно від кутів *B* та *C* є або об'єднанням (кути гострі, рис. 16), або різницею (один із кутів тупий, рис. 17) двох конусів зі спільною основою, яка є кругом радіуса h_a. У першому випадку сума висот конусів, а в другому випадку — різниця висот конусів дорівнює стороні *a*. Тож в обох випадках об'єм тіла обертання дорівнює

$$V_a = \frac{\pi h_a^2 \cdot a}{3}.$$

Це ж значення об'єм має й тоді, коли один із кутів *B* та *C* прямий: за цієї умови тіло обертання само́ стає конусом з висотою *a*.

З аналогічних міркувань $V_b = \frac{\pi h_b^2 \cdot b}{3}$. Отже,

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\frac{1}{3}\pi h_a^2 a}{\frac{1}{3}\pi h_b^2 b} = \frac{h_a^2 a}{h_b^2 b} = \frac{\frac{1}{4}h_a^2 a^2 \cdot \frac{4}{a}}{\frac{1}{4}h_b^2 b^2 \cdot \frac{4}{b}} = \frac{S_{ABC}^2 \cdot \frac{4}{a}}{S_{ABC}^2 \cdot \frac{4}{b}} = \frac{1}{a} \Big/ \frac{1}{b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

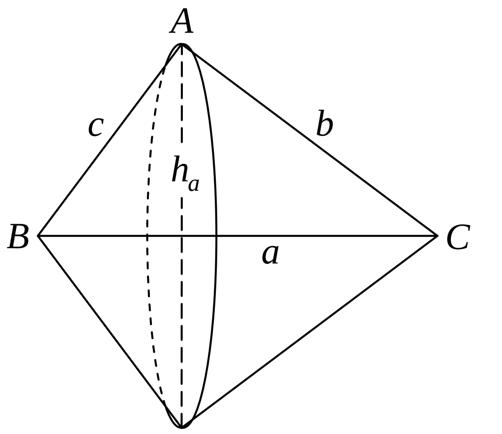

Рис. 16

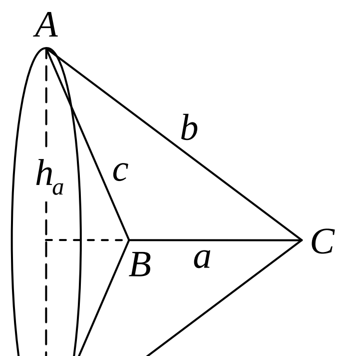

Рис. 17

5. *Задача № 5 групи «А» старшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» старшої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» середньої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*

Старша ліга. Група «В»

1. *Задача № 1 групи «Б» старшої ліги.*

2. *Задача № 2 групи «А» середньої ліги.*

3. *Задача № 3 групи «А» середньої ліги.*

4. *Задача № 4 групи «Б» старшої ліги.*

5. *Задача № 5 групи «А» старшої ліги.*

6. *Задача № 6 групи «А» середньої ліги.*

7. *Задача № 7 групи «А» молодшої ліги.*

8. *Задача № 8 групи «А» середньої ліги.*