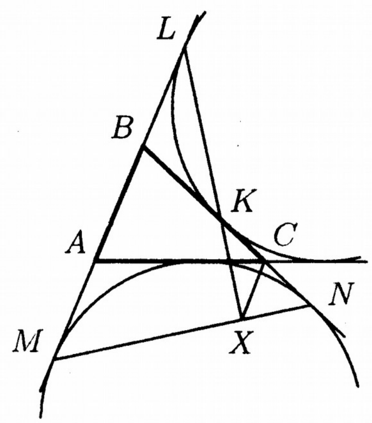
Задавальник під ялинку

А. Незроблені задачі з комбінаторного задавальника.
Б. Задавальник «Нерівності».

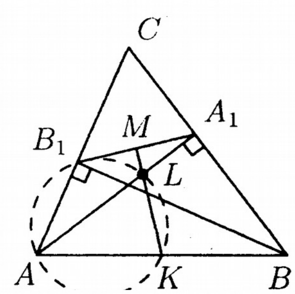
00.44. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных *собственных* делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны. (*А. Голованов*)

00.51. $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на $a_i a_j$ при всех $i \neq j$? (*А. Баранов*)

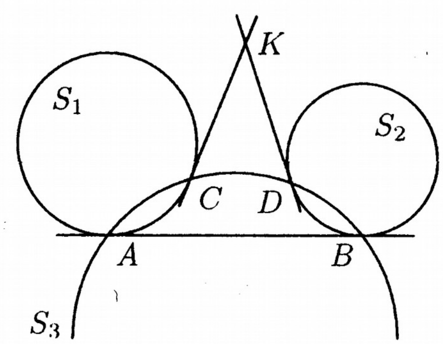
00.54. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB — в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX — биссектриса угла ACN. (*С. Берлов*)



00.57. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки K и M — середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, K, L и B_1 лежат на одной окружности. (*С. Берлов*)



00.71. S_1 и S_2 — две окружности, не имеющие общих точек. Общая касательная (внешняя) касается их в точках A и B. Окружность S_3 проходит через A и B и вторично пересекает S_1 и S_2 в точках C и D соответственно. K — точка пересечения прямых, касающихся S_1 и S_2 в точках C и D (см. рисунок)*. Докажите, что $KC = KD$. (*С. Берлов*)



00.73. Существуют ли 1000 натуральных чисел, таких что наибольшие общие делители всевозможных наборов этих чисел (по два, по три, $\ldots$, по тысяче) попарно различны?

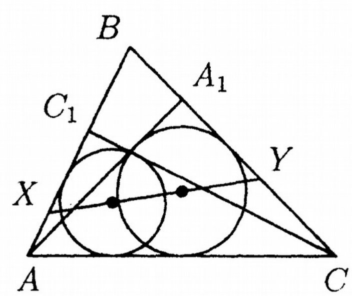
(*С. Берлов*)

00.76. a и b — различные натуральные числа, такие что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ — степень простого числа. Найдите эти числа. (*С. Берлов*)

00.77. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалинии. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выиграет при правильной игре? (*Д. Карпов*)

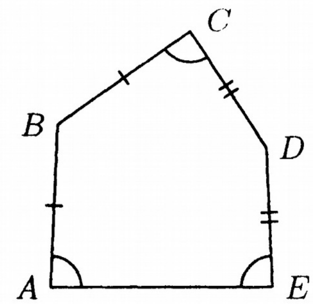
00.95. Даны попарно взаимно простые натуральные числа x, y, z, t, такие что $xy + yz + zt = xt$. Докажите, что сумма квадратов каких-то двух из этих чисел вдвое больше суммы квадратов двух оставшихся. (*С. Берлов*)

00.96. AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AA_1C и CC_1A, пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $BX = BY$. (*С. Берлов*)



00.101. Связный граф назовем двусвязным, если при удалении любой вершины связность сохраняется. Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным. (*Д. Карпов, А. Пастор*)

01.51. $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, в котором $AB = BC$, $CD = DE$ и $\angle A = \angle C = \angle E < 90°$. Докажите, что этот пятиугольник — описанный.

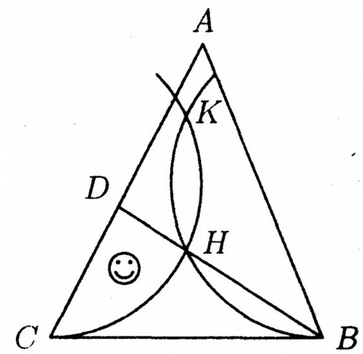


(*Ф. Бахарев*)

01.52. a, b и c — натуральные числа, для которых $(a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1) = 1$. Докажите, что $(ab + c, bc + a, ca + b) = (a, b, c)$. (Как обычно, (x, y, z) обозначает наибольший общий делитель чисел x, y и z.)

(*А. Голованов*)

01.75. Высóты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка K такова, что описанные окружности треугольников BHK и CHK касаются прямой BC. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины B на сторону AC. Докажите, что точка A равноудалена от прямых KB и KD.



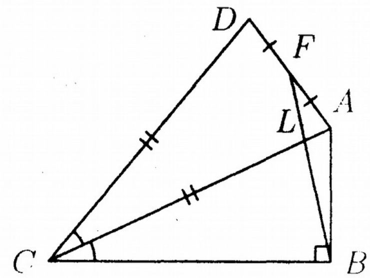
(*С. Берлов*)

01.88. На доске написаны числа 1, 2, ... , 1999. Два игрока по очереди делают ходы по следующим правилам: каждым ходом разрешается стереть любые два числа и записать на их место либо их сумму, либо их произведение, либо разность (любого знака). Первый игрок хочет, чтобы число, которое останется на доске последним, делилось на 1999. Сумеет ли второй ему помешать? (*В. Франк*)

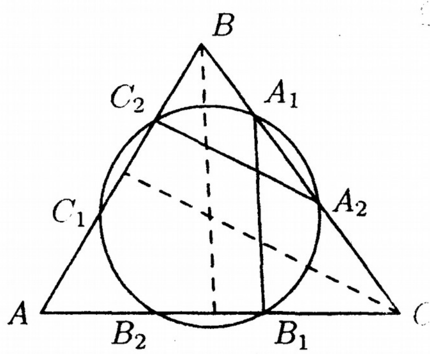
01.97. В клетках бесконечного клетчатого листа расставлены целые числа таким образом, что для каждого числа a сумма двух чисел в клетках под ним и справа от него равна $2a + 1$. Докажите, что в каждом бесконечном диагональном ряду направления “сверху справа вниз влево” все числа различны. (*Ю. Лифшиц*)

02.50. Каждый сотрудник компании “Кака-кола”, имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо. (*Ю. Лифшиц*)

02.57. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle ABC = 90°$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$. (*Ф. Бахарев*)

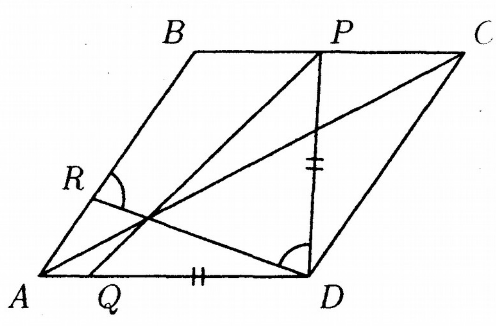


02.95. Окружность, концентрическая со вписанной окружностью треугольника ABC, пересекает стороны треугольника в шести точках, образующих выпуклый шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, где точки A_i лежат на стороне BC и т. д. Докажите, что если прямая A_1B_1 параллельна биссектрисе угла $\angle B$, то прямая A_2C_2 параллельна биссектрисе угла $\angle C$. (*С. Берлов*)



02.97. В ряд стоят 14 гномов, у каждого не менее 5 орехов Каждую минуту один из гномов может передать орех гному стоящему справа, если у того больше орехов. Через некоторое время все орехи собрались у одного гнома. Какое наименьшее число орехов могло быть у гномов? (*Ю. Лифшиц*)

02.98. На сторонах BC, AD и AB ромба $ABCD$ выбраны точки P, Q и R соответственно таким образом, что $DP = DQ$ и $\angle BRD = \angle PDR$. Докажите, что прямые DR, PQ и AC проходят через одну точку. (*С. Берлов*)



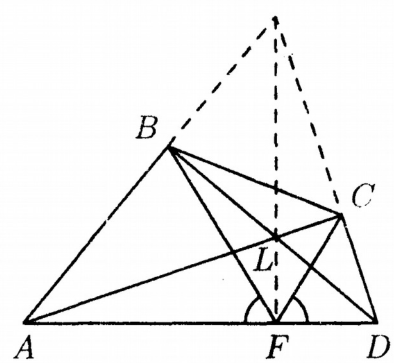
02.99. Квадратный трехчлен с целыми коэффициентами $p(x)$ обладает следующим свойством: для любых натуральных чисел n и k число $\frac{p(n+1)p(n+2)\ldots p(n+k)}{p(1)p(2)\ldots p(k)}$ — целое. Докажите, что этот трехчлен делится на x. (*Ф. Петров*)

03.49. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо неравенство $2x^9 + 9x^8 \leqslant 9x^{10} + 2$. (*А. Храбров*)

03.50. Докажите, что существует такой набор из 100 попарно различных натуральных чисел, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел одной из групп делится на сумму чисел другой группы. (*С. Берлов*)

03.59. Дано $n \geqslant 4$ натуральных чисел. Известно, что сумма квадратов любых $n-2$ из этих чисел делится на произведение двух оставшихся чисел. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы два одинаковых. (*С. Иванов*)

03.71. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. На стороне AD лежит такая точка F, что $\angle FBC = 2\angle FAC$, $\angle FCB = 2\angle FDB$, $\angle AFB = \angle DFC$. Докажите, что прямые AB, CD и FL пересекаются в одной точке. (*Ф. Бахарев*)



03.73. Докажите, что при любом натуральном n число $n!$ обладает свойством: к любому его делителю, отличному от самого $n!$, можно прибавить такой делитель $n!$, что сумма снова будет делителем $n!$. (*А. Голованов, А. Храбров*)

03.75. Точка K — середина чевианы AD треугольника ABC. Точка X на отрезке KC такая, что $\angle ABK = \angle XBC$. Оказалось, что $KX \cdot BD = CX \cdot CD$. Докажите, что $\angle BAX = \angle BCX$. (*Ф. Бахарев, А. Храбров*)