6-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 2

Старша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Для натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ довести, що справджується нерівність:

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq a_1a_2\ldots a_n,$$

де $k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, а $t = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Чи можлива тут рівність?

Відповідь: Рівність можлива при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Розв'язання 1. З нерівності з упорядкованих наборів, що та з вагової нерівності між середніми маємо :

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \geq \frac{a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n} \geq$$

$$\geq \sqrt[(a_1+a_2+\ldots+a_n)]{\left(a_2^{a_1}a_3^{a_2}\ldots a_n^{a_{n-1}}a_1^{a_n}\right)} \Rightarrow$$

$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n} \geq (a_1a_2\ldots a_n)^t \Rightarrow \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{kn} \geq (a_1a_2\ldots a_n)^t \Rightarrow$ $\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq a_1a_2\ldots a_n$. При цьому рівність можлива лише в разі $k = t$, що рівносильне умові рівності усіх чисел, тобто $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Розв'язання 2. З відомої нерівності $\frac{a_1^2}{k_1} + \frac{a_2^2}{k_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{k_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{k_1+k_2+\ldots+k_n}$, яка виконується для усіх дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та додатних $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ми маємо:

$$\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{a_1+\ldots+a_n} \geq \frac{a_1^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \geq$$

$$\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n(a_1+a_2+\ldots+a_n)} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Таким чином достатньо довести, що $\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{\frac{kn}{t}} \geq a_1a_2\ldots a_n$. З умов задачі очевидно, що $\frac{kn}{t} \geq n$, а також з натуральності зданих чисел маємо, що $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq 1$, тому залишається лише довести, що $\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n \geq a_1a_2\ldots a_n$, а це добре відома нерівність між середніми.

2. Знайти усі дійсні числа a для яких існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка для довільних дійсних x, y задовольняє умову: $x + f(y) = af(y + f(x))$.

Відповідь: $a = 1$.

Розв'язання. Очевидно, що $a \neq 0$, підставимо в умову $y = 0 \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}f(0)$. Тоді f – бієкція. Тому існує функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $f(g(x)) \equiv x$. Підставимо замість x $g(x)$ у основне співвідношення. $g(x) + f(y) = af(x + y)$, оскільки це співвідношення симетричне відносно x, y маємо, що $g(x) + f(y) = g(y) + f(x) \Rightarrow g(x) - f(x) = c = const$. Підставимо у основне співвідношення $y = c$, тоді $x + f(c) = af(f(x) + c) = af(g(x)) = ax$, тобто для усіх дійсних x $x(a - 1) = f(c)$. Тобто для $a = 1$ існує відповідна функція $f(x) = x$.

3. Всередині сфери S радіуса R, розташовано 8 однакових менших сфер, які дотикаються великої сфери, а також двох малих сфер (центри малих сфер розташовані у діаметральній площині великої сфери). Сфера S_1 дотикається до усіх 8 малих сфер та до великої сфери. Знайти радіус сфери S_1.

   Відповідь: $\dfrac{R}{1 + 2\sin\frac{\pi}{8}}$.

   Розв'язання. Знайдемо спочатку радіус малої сфери. Позначимо його через r та побачимо, що вони повинні бути розташовані таким чином, що деякий діаметральний переріз цих сфер дає картину, що зображена на рис.1. Тоді з $\triangle AOB$ легко одержати: $\frac{r}{R-r} = \sin\frac{\pi}{8} \Rightarrow r = R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}$. Тепер позначимо радіус сфери S_1 через ρ. Треба розглянути перпендикулярний переріз до перерізу, що зображений на рис.1. Оскільки $\triangle AOO_1$ – прямокутний трикутник з катетами $OA = R - r$, $OO_1 = R - \rho$ та гіпотенузою $AO_1 = r + \rho$ (рис.2). З теореми Піфагора одержимо, що $\rho = R \cdot \frac{R-r}{R+r}$, якщо тепер підставити знайдене вище значення $r = R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}$ одержимо шукану відповідь: $\rho = R \cdot \frac{R-r}{R+r} = \frac{R}{1+2\sin\frac{\pi}{8}}$.

4. Нехай дано гострокутний трикутник ABC та точка T, така, що $\angle ATB = \angle ATC = \angle BTC = \frac{2}{3}\pi$. Нехай P – така точка, всередині цього трикутника, що $\angle PAB = \angle TAC$, $\angle PBA = \angle TCB$. Довести, що $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$.

   Розв'язання. З умов задачі випливає, що рівними також є такі пари кутів (рис.4): $\angle PAC = \angle TAB$ та $\angle PCB = \angle TBA$. Також, за теоремою Чеви в синусах $\frac{\sin PBA}{\sin PCB} \cdot \frac{\sin PAC}{\sin PAB} \cdot \frac{\sin PCB}{\sin PCA} = 1$ і $\frac{\sin TCB}{\sin TBA} \cdot \frac{\sin TAB}{\sin TAC} \cdot \frac{\sin TCA}{\sin TCB} = 1$ ми маємо, що $\frac{\sin PCB}{\sin PCA} = \frac{\sin TCA}{\sin TCB}$, звідки $\angle PCA = \angle TCB$ та $\angle PCB = \angle TCA$. Нехай D, E та F – проекції точки P на сторони BC, AC та AB відповідно. Зрозуміло, що E, F лежать на колі з діаметром AP, F, D – з діаметром BP, D, E – CP. Тоді $\angle EFD = \angle EFP + \angle PFD = \angle EAP + \angle PBD = \angle CAP + \angle PCB = \angle BAT + \angle TAB = \pi - \angle ATB = \frac{1}{3}\pi$. Аналогічно $\angle EDF = \angle DEF = \frac{1}{3}\pi$, отже $\triangle DEF$ рівносторонній, тому $ED = DF = FE$. З теореми синусів маємо $EF = AP \cdot \sin\angle BAC$, $DF = BP \cdot \sin\angle ABC \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{\sin ABC}{\sin BAC} = \frac{AC}{BC}$, що й треба було довести.

5. Довести, що число $\underbrace{99\ldots9}_{2005}{}^{2009}$ можна одержати з числа $\underbrace{99\ldots9}_{2008}{}^{2009}$ шляхом витирання декількох цифр.

   Розв'язання. Запишемо число $M = \underbrace{99\ldots9}_{2008}{}^{2009}$ у вигляді $M = (10^k - 1)^n = 10^{kn} - C_n^1 \cdot 10^{k(n-1)} + C_n^2 \cdot 10^{k(n-2)} - \ldots = (10^k - C_n^1) \cdot 10^{k(n-1)} + (C_n^2 - 1) \cdot 10^{k(n-2)} + (10^k - C_n^3) \cdot 10^{k(n-3)} + (C_n^4 - 1) \cdot 10^{k(n-4)} + \ldots$ тут $(k = 2008, n = 2009)$. Побачимо, що $C_{2009}^i \le C_{2009}^{1004} < 2^{2009} < 10^{2005}$. Таким чином у вищенаведеному поданні числа через степені 10^k кожний доданок може бути записаний як k цифрове натуральне число (спочатку якого можуть йти нулі). Бачимо, що кожне з цих чисел (внаслідок наведеної нерівності) починається або з 999 – доданки типу $(10^k - C_n^i)$, або з 000 – доданки типу $(C_n^i - 1)$. Якщо ці трійки цифр викреслити, то ми одержимо шукане подання числа $\underbrace{99\ldots9}_{2005}{}^{2009}$.

6. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Знайдіть всі натуральні n, для яких виконується рівність $n = 2(S(n))^3 + 8$.

   Відповідь: 10, 2008, 13726.

   Розв'язання. Зауважимо спочатку, що $S(n) \equiv n \pmod 9$, а тому із заданої рівності $n = 2(S(n))^3 + 8$ неважко отримати, що $S(n) \equiv 1 \pmod 9$. Нехай тоді $S(n) = 9k + 1$, і позначимо через l – кількість цифр у десятковому запису числа n. Тоді можна записати такі нерівності: $10^{l-1} \le n = 2(S(n))^3 + 8 \le 2 \cdot (9l)^3 + 8 < 1500l^3$, тому $10^{l-3} \le 15l^3$. При $l = 7$ $10^4 > 15 \cdot 7^3 = 5145$, при більших l індукцією легко показати, що ця нерівність справджується також. Тому $l \le 6$ та $S(n) \le 9l \le 54$, звідки маємо, що $k \le 5$ і залишається розглянути випадки.

   $k = 0 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 10$ – розв'язок.

   $k = 1 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 2008$ – розв'язок.

   $k = 2 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 13726$ – розв'язок.

   $k = 3 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 43912$ – не розв'язок, оскільки $S(43912) \ne 28$.

   $k = 4 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 101314$ – не розв'язок, оскільки $S(101314) \ne 37$.

   $k = 5 \Rightarrow n = 2(S(n))^3 + 8 = 194680$ – не розв'язок, оскільки $S(194680) \ne 46$.

7. Сума 20 попарно різних цілих дорівнює 210.

   а) Довести, що сума квадратів цих цілих не менша від 2870. ***б)*** Знайти ці числа, якщо сума їх квадратів дорівнює 2870.

   Відповідь: ***б)*** це числа $1, 2, \ldots, 20$.

   Розв'язання. ***а)*** Нехай числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20}$ задовольняють умови задачі. Побачимо, що $1 + 2 + \ldots + 20 = 210$ та $1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2 = 2870$. Визначимо числа $r_1, r_2, \ldots, r_{20}$, таким чином: $a_i = i + r_i$, $1 \le i \le 20$. Оскільки усі a_i цілі та впорядковані по зростанню, то $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_{20}$. Оскільки $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 1+2+\ldots 20$, то , $r_1+r_2+\ldots+r_{20} = 0$, то $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{20}^2 = (1+r_1)^2+(2+r_2)^2+\ldots+(20+r_{20})^2 = (1^2+2^2+\ldots+20^2)+2(1r_1+2r_2+\ldots+20r_{20})+(r_1^2+r_2^2+\ldots+r_{20}^2)$. З упорядкованості $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_{20}$ випливає, що $S_1 = 1r_1 + 2r_2 + \ldots + 20r_{20} \ge 20r_1 + 19r_2 + \ldots + 1r_{20} = S_2$, але з іншого боку $S_1 + S_2 = 21(r_1 + r_2 + \ldots + r_{20}) = 0$ $\Rightarrow S_1 \ge 0 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \ldots + 2_{20}^2 \ge (1^2 + 2^2 + \ldots + 20^2) = 2970$, що й треба було довести.

   б) З останньої нерівності попереднього пункту ми бачимо, що рівність $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{20}^2 = (1^2+2^2+\ldots+20^2) = 2970$, можлива лише за умови $r_1 = r_2 = \ldots = r_{20} = 0$, звідси й випливає наведена відповідь.

8. Два павуки сидять у одній вершині куба, муха сидить у протилежній вершині. Павуки та муха можуть рухатись вздовж ребер кубу з однаковими швидкостями. У будь-який момент часу павуки та муха знають розташування одне одного. Довести, що якщо павуки будуть рухатись узгоджено, то вони з'їдять муху.

   Розв'язання. Нехай вершини кубу позначені як на рис.6. Павуки спочатку сидять у вершині A, муха – у вершині G. Перший павук рухається центрально симетрично до руху мухи відносно центра кубу, поки муха не досягне середини P, M, N одного з ребер, що виходять з вершини G. Наприклад муха досягла точки M, тоді далі перший павук починає рухатись симетрично рухам мухи відносно площини $BDHF$. Цей павук з'їсть муху, якщо вона попаде у одну з вершин B, D, H, F. Якщо вона туди не потрапляє, то маршрут її рухів – це ламана, яка складається з ланки CG та двох пар ланок, які виходять з вершин C та G. Тоді стратегія руху другого павука така – він повзе у напрямі вершини G, а далі очевидно, як він може її наздогнати (або вона досягне точки де її дожене перший павук. Якщо муха не досягає точок P, N, M, то вона рухається по ребрах GH, GF, GC, не доходячи до середини. Тоді другому павуку достатньо просто дістатись до вершини G і подальша стратегія очевидна.

Старша ліга
Група Б

Умови та розв'язки

1. Довести, що для невід'ємних дійсних чисел x, y, z, які задовольняють умову $x + y + z = 2$, справджується нерівність: $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + xyz \leq 1$. При яких значення x, y, z має місце рівність?

   Відповідь: рівність можлива для таких трійок (x, y, z): (1,1,0), (1,0,1) та (0,1,1).

   Розв'язання. Є відома нерівність $2ab \leq a^2 + b^2$, яка має місце для довільних a, b, рівність лише за умови $a = b$. Тоді можемо зробити такі перетворення:
   $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + xyz = \frac{1}{2}(2(xy)^2 + 2(yz)^2 + 2(zx)^2 + 2xyz) = \frac{1}{2}(xy \cdot 2xy + yz \cdot 2yz + zx \cdot 2zx + 2xyz) \leq \frac{1}{2}(xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) + 2xyz) = \frac{1}{2}((xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) - xyz^2 - yzx^2 - zxy^2 + 2xyz) = \frac{1}{2}((xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) - xyz(x + y + z - 2)) = \frac{1}{2}((xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2))$ – рівність тут можлива лише за таких умов: $x = y = z$, або $x = y, z = 0$, або $y = z, x = 0$, або $z = x, y = 0$.

   Позначимо $a = 2(xy + yz + zx)$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, тоді з нерівності $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ останні нерівності можна продовжити таким чином: $\frac{1}{2}((xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)) = \frac{1}{4}((2xy + 2yz + 2zx)(x^2 + y^2 + z^2)) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(x + y + z)^4 = 1$, що й треба було довести. В останніх перетвореннях рівність можлива за умови $2(xy+yz+zx) = x^2+y^2+z^2$, звідси з наведених вище випадків відпадає $x = y = z$, а залишаються лише випадки (1,1,0), (1,0,1) та (0,1,1).

2. Задача № 2 старшої ліги групи А.

3. Задача № 3 старшої ліги групи А.

4. Два кола перетинаються у точках M, N, до них проведена спільна дотична, яка ближча до точки N, ніж до точки M і дотикається до першого кола у точці P і другого у точці Q. Пряма PN перетинає друге коло у точці $R \neq N$. Довести, що MQ – бісектриса кута $\angle PMR$.

   Розв'язання. Позначимо кути $\angle PMN = \alpha, \angle NMQ = \beta, \angle QMR = \gamma$, тоді $\angle QPN = \alpha, \angle PQN = \beta$ за властивостями вписаних кутів (рис.5). Аналогічно $\angle QNR = \gamma$. Оскільки зовнішній кут $\angle QNR$ дорівнює сумі двох інших внутрішніх для $\triangle PNQ$, то $\gamma = \alpha + \beta$, звідки $\angle PMQ = \alpha + \beta = \angle QMR$, що й треба було довести.

5. Знайти усі такі прості p, для яких многочлен $f(x) = 2x^3 - 2px^2 + (1-p)x + p$ має принаймні один раціональний корінь.

   Відповідь: $p = 2$.

   Розв'язання. Простою перевіркою переконуємось, що $p = 2$ задовольняє умови задачі. Нехай тепер $p \neq 2$, тобто воно є непарним простим числом. Можливі раціональні корені треба шукати серед чисел: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm p, \pm\frac{p}{2}$.

   $f(1) = 3 - 2p \neq 0$, оскільки це непарне число, а тому не нуль.

   $f(-1) = -3$.

   $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

   $f\left(-\frac{1}{2}\right) = p - \frac{3}{4} \neq 0$.

   $f(p) = p^2(1-4p) \neq 0$.

   $f(-p) = p(2-p) \neq 0$, оскільки $p \neq 2$.

   $f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{-p^3-2p^2+6p}{4} \neq 0$, оскільки у чисельнику непарне число.

   $f\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{-3p^3+2p^2+2p}{4} \neq 0$, аналогічно попередньому.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Задача № 7 старшої ліги групи А.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Середня ліга
Група А

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Знайти усі функції $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, для яких для довільних цілих x, y виконується умова: $f(3x - y) \cdot f(y) = 3f(x)$.

   Відповідь: $f = 0$, $f = 3$ та $f(x) = 3 \cdot (-1)^x$.

   Розв'язання. Очевидним розв'язком є $f = 0$. Покладемо $x = y = 0 \Rightarrow f(0) \in \{0; 3\}$. Якщо $f(0) = 0$, то з підстановки $y = 0$ маємо $f = 0$. Нехай тепер $f(0) = 3$, покладемо $x = 0$, тоді для довільного цілого y $f(y)f(-y) = 9$, а тому функція у жодній точці не обертається в нуль. При $x = y \neq 0$ маємо, що $f(2x) = 3$, тобто для усіх парних x $f(x) = 3$. Покладемо $y = 4x$ – парне число. Тому $f(-x) = f(x)$ і ми маємо, що ця функція парна, а крім того, $f(x) \in \{3; -3\}$. Покладемо для цілого t $x = 1, y = 2t+1$ $f(2t-2)f(2t+1) = 3f(1)$, звідки $f(2t+1) = f(1)$, звідки маємо ще 2 розв'язки: $f = 3$ та $f(x) = 3 \cdot (-1)^x$.

3. У трикутнику ABC точка P – середина сторони BC, Q – точка на стороні CA така, що $CQ = 2QA$. Позначимо $BQ \cap AP = S$. Довести, що $AS = SP$.

   Розв'язання. За теоремою Менелая до $\triangle PCA$ маємо (рис.3): $-1 = \frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SP} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{AS}{SP} = -\frac{AS}{SP} \Rightarrow AS = SP$, що й треба було довести.

4. Задача № 4 старшої ліги групи А.

5. Задача № 5 старшої ліги групи Б.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Два гравці "А"та "В"грають у таку гру: вони по черзі зліва направо записують цифри шестицифрового числа. Першим "А"обов'язково пише цифру, що відмінна від 0, далі цифри пишуться довільним чином, але усі 6 цифр повинні бути різними. "А"виграє, якщо записане число ділиться на 2, 3 або 5, інакше виграє "В". Довести, що "А"має виграшну стратегію.

   Розв'язання. Нехай записане число $\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3}$, усі цифри різни, та $a_1 \neq 0$. Позначимо множини $M = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ та $N = \{1, 3, 7, 9\}$. Очевидно, що "В щоб не програти не повинно виконуватись умова $b_3 \in N$. Таким чином "А"вибирає $a_1, a_2 \in N$, тоді "В"повинен вибрати $b_1, b_2 \in M$, бо інакше або не можна вже обрати для третього хода "А"цифру з N, тому "А"виграє, або залишається лише одна цифра з N, яку і обирає своїм третім ходом "А"і знову примушує $b_3 \in N$, звідки й перемагає.

   Таким чином "А"може сам обирати цифри з N і він це робить таким чином: $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Тому своїм останнім ходом "В"обирає число, яке рівне $\equiv 1 \pmod 3$. Далі просто показуємо стратегію вибору третього ходу гравця "А"за модулем 3. Оскільки $a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod 3$, то ці цифри можна не враховувати.

   Якщо $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$, то "А"вибирає одну з цифр 2, 5, 8 і виграє (усі три не могли вже бути використаними за побудовою стратегії).

   Якщо $b_1 + b_2 \equiv 1 \pmod 3$, то "А"вибирає цифру 1 і виграє.

   Якщо $b_1 + b_2 \equiv 2 \pmod 3$, то "А"вибирає одну з цифр 0, 6 і виграє (обидві ці цифри не міг обрати своїми ходами "В", бо тоді $b_1 + b_2 + a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod 3$, що не вірно).

   Ці випадки й показують виграшну стратегію для "А".

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Середня ліга
Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старшої ліги групи Б.

2. Задача № 2 середньої ліги групи А.

3. Задача № 3 середньої ліги групи А.

4. Задача № 4 старшої ліги групи Б.

5. Чи можна у добутку з 20 факторіалів $(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot\ldots\cdot(20!)$ викреслити один з цих множників, щоб вираз, що залишився був повним квадратом?

   <u>Розв'язання</u>. Оскільки $(2n-1)!\cdot(2n)! = ((2n-1)!)^2\cdot(2n)$, то можемо наш вираз перетворити таким чином: $(1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot\ldots\cdot(20!) = (1!)^2\cdot 2\cdot(3!)^2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(19!)^2\cdot 20 = ((1!)(3!)\ldots(19!))^2\cdot(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20) = ((1!)(3!)\ldots(19!))^2\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 10)\cdot 2^{10} = ((1!)(3!)\ldots(19!))^2\cdot(2^5)^2\cdot 10!$, звідки стає зрозумілим, що після викреслення множника $10!$ вираз стає повним квадратом.

6. Задача № 6 старшої ліги групи А.

7. Задача № 7 середньої ліги групи А.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Молодша ліга
Група А

Умови та розв'язки

1. З трійкою чисел можна проводити такі операції – узяти будь-які два числа та замінити їх на середнє арифметичне та середнє гармонічне. Чи можна з початкової трійки чисел $2-\sqrt{2}, 1, 2\sqrt{2}+3$ одержати за скінченну кількість кроків таку трійку: $\sqrt{2}-1, 2, 3\sqrt{2}-1$?

   Нагадаємо, що середнім арифметичним та середнім гармонічним чисел a, b називаються відповідно числа $\frac{a+b}{2}$ та $\frac{2ab}{a+b}$.

   <u>Розв'язання</u>. Добре відомо, що середнє арифметичне та середнє гармонічне двох додатних чисел не менше від меншого з чисел. У початковому набору найменше число $2-\sqrt{2}$ більше від найменшого з чисел $\sqrt{2}-1$ у другом у наборі, тому його одержати не можна.

2. Чи буде число $2009^2+2010^2+4038090^2$ повним квадратом?

   <u>Відповідь</u>: Так буде.

   <u>Розв'язання</u>. Так буде, оскільки $4038090 = 2009\cdot 2010$, а далі все базується на рівності:
   $$(n^2-n+1)^2 = (n-1)^2+n^2+n^2(n-1)^2.$$

3. Задача № 3 середньої ліги групи А.

4. Проекцією кола, що вписане у прямокутний трикутник ABC з вершиною прямого кута C, на гіпотенузу є відрізок MN. Знайти величину кута $\angle MCN$.

   <u>Відповідь</u>: $\angle MCN = 45°$.

   <u>Розв'язання</u>. Позначимо, як на рис.7 точки дотику вписаного кола до сторін через J, L, K, тоді очевидно за побудовою, що трикутники CLI, CIJ, MKI, NKI – прямокутні та рівнобедрені з однаковими катетами, тому вони усі рівні і $IC = IM = IN$, тому точки C, M, N лежать на одному колі із центром у точці I. Тому $\angle MIN = 90°$ – центральний у цьому колі, а $\angle MCN$ – вписаний, тому $\angle MCN = 45°$.

5. Задача № 5 середньої ліги групи Б.

6. Задача № 6 середньої ліги групи Б.

7. Задача № 7 середньої ліги групи А.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.

Молодша ліга
Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 молодшої ліги групи А.

2. Задача № 2 молодшої ліги групи А.

3. Задача № 3 середньої ліги групи А.

4. Задача № 4 молодшої ліги групи А.

5. Задача № 5 середньої ліги групи Б.

6. Знайти усі пари простих чисел, для яких і сума і різниця також є простим числом.

   <u>Відповідь</u>: $(2, 5)$.

   <u>Розв'язання</u>. Очевидно, що одним серед цих чисел простих чисел повинно бути число 2, інакше сума двох непарних чисел э парним числом, а тому не э простим.

   Друге просте число позначимо p, тоді простими повинні бути такі три числа: $p-2, p, p+2$, але це три послідовних непарних числа, тому принаймні одне з них кратне 3. Таким чином усі ворни прості, якщо одне з них є 3, звідси легко й знаходимо наведений розв'язок.

7. Задача № 7 середньої ліги групи А.

8. Задача № 8 старшої ліги групи А.