Тренувальні збори для групи резерву. Комбінаторика

Данило Хілько dkhilko@ukr.net

Травень 2016

1 Підрахунок двома способами

1. На двох протилежних гранях грального кубика намальовано по одній точці, на двох інших протилежних — по дві, а на двох, що лишились, — по три. З восьми таких кубиків склали куб $2\times2\times2$ і порахували сумарну кількість точок на кожній з його шести граней. Чи могли отримати шість послідовних чисел?

2. Довести, що
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

3. N червоних і N чорних точок чергуючись розділили коло на $2N$ дуг так, що сусідні дуги не рівні, але кожна з дуг рівна одному з трьох чисел: a, b, c. Доведіть, що периметри червоного і чорного N-кутників рівні.

4. На плоскости отмечено 50 точек, никакие три з которых не лежат на одной прямой. Их покрасили в 4 цвета. Докажите, что будет минимум 130 одноцветных разносторонних треугольников на этих вершинах

5. Учні розв'язували контрольну. Щонайменше 3/4 задач виявилися складними: їх не розв'язало щонайменше 3/4 учнів. Щонайменше 3/4 учнів написали контрольну добре: вони розв'язали щонайменше 3/4 задач. Чи могло таке статись? А якщо замінити 3/4 всюди на 2/3?

6. На плоскости отмечено 2009 точек. Часть из них покрашено в синий цвет, остальные — в красный. Известно, что на каждой единичной окружности с центром в синей точке лежит ровно 2 красные. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

7. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n — для которых $f(x) = f(y)$, через k — для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leq n + k$.

8. Дано n точек на плоскости. Докажите, что можно выбрать их подмножесто из не менее, чем $\sqrt{n}$ элементов такое, что среди треугольников с вершинами в точках этого подмножества нету ни одного правильного.

9. Многоугольник, у которого сторон больше 3, разрезали непересекающимися диагоналями на треугольники. Пускай x — количество получившихся треугольников, две стороны которых являются сторонами многоугольника. y — количество треугольников, одна сторона которых является стороно многоугольника, а z — количество треугольников, что никакие их стороны не являются сторонами многоугольника. Докажите, что
$$x = z + 2.$$

10. На плоскости отмечено n точек общего положения. Докажите, что треугольников площади 1 с вершинами в этих точках не больше
$$\frac{2}{3}(n^2-n).$$

11. На вечеринку пришли n человек. Каждые два из них — либо знакомы, либо нет. Какое наибольшее количество пар незнакомцев, у которых есть общий друг, может быть?

12. На фестиваль приехали 8 певцов. Организаторы хотят составить расписание концертов так, что в каждом концерте выступало по 4 певца и любая пара певцов участвовала в одинаковом количестве концертов. Найдите минимальное возможное количество концертов.

13. В компании $2N$ мальчиков и 6 девочек. Известно, что для любой пары девочек существует ровно N мальчиков, которые знакомы с одно и не знакомы с другой девочкой. Докажите, что количество мальчиков, знакомых со всеми девочками, не превышает
$$\frac{N}{3}.$$

14. В школе учится 2007 мальчиков и 2007 девочек. Каждый школьник ходит не более, чем на 100 кружков. Известно, что любая пара (девочка и мальчик) ходят в один общий для них кружок. Докажите, что на какой-то кружок ходит минимум 11 мальчиков и 11 девочек.

15. n школьников ходят на кружки. Известно, что на каждый кружок ходит минимум 2 школьника. Также, если в двух кружках есть хотя бы два общих школьника, то количество школьников, которые ходят в них, разная. Докажите, что классов не более, чем $(n-1)^2$.

16. На вечеринке было $12k$ людей. Каждый пожал руку $3k+6$ людям. Также известно, что для любой пары количество людей, поприветствовавших обоих, одинаково. Сколько человек было на вечеринке?

17. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдётся два комитета, в которых не менее 4 общих членов.

18. В классе a мальчиков и b девочек. Каждый мальчик считает каждую девочку либо умной, либо красивой. Предположим, что оценки любой пары мальчиков совпадают не больше, чем для k девочек. Докажите, что $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

19. (*)Всередині прямокутного листа паперу вирізали n прямокутних дір зі сторонами, паралельними краям паперу. На яку найменшу кількість прямокутних частин можна гарантовано розрізати лист?

2 Приклад+оцінка