Динамічні системи

Дискретною динамічною системою називається пара (X, T), де X — компактний метричний простір (який динамісти називають фазовим), а T — неперервне відображення з X в себе. Динамістів цікавить те, як система змінюється із плином часу, тобто як себе поводять точки і множини під дією ітерацій T.

В динамічних системах n-та ітерація функції позначається T^n, тобто $T^n x = T(T(T \ldots T(Tx) \ldots))$.

Множина A називається позитивно-інваріантною, якщо $TA \subset A$. Орбіта точки x — послідовність образів точки x під дією ітерацій T, тобто $\mathrm{Orb}_T(x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$. Омега-гранична множина точки x (позначається $\omega_T(x)$) визначається як множина всіх точок z, для яких існує строго зростаюча послідовність k_n, $n \to +\infty$ така, що $T^{k_n}x \to z$.

Задача 1. Доведіть, що $\omega_T(x)$ і $\overline{\mathrm{Orb}_T(x)}$ є замкненими позитивно-інваріантними множинами.

Задача 2. Порівняйте $\omega_T(x)$ і $\overline{\mathrm{Orb}_T(x)}$. Доведіть, що $\omega_T(x) \subset \overline{\mathrm{Orb}_T(x)}$. Чи правильне обернене вкладення?

Точка $x \in X$ називається транзитивною, якщо для довільного відкритого непорожнього $U \subset X$ існує $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що $T^n x \in U$. Система називається транзитивною, якщо вона містить хоча б одну транзитивну точку.

Нехай $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$, а $T = \sigma$ визначено за формулою

$$x = \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \mapsto \sigma x = \{x_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}.$$

Надамо $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ струтури метричного простору. Нехай $x = x_0x_1x_2\ldots$, $y = y_0y_1y_2\ldots$. Визначимо

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + \min\{k : \ x_k \neq y_k\}}.$$

Задача 3. Доведіть, що d — метрика, (X, d) — компактний метричний простір, а σ неперервне відображення з X в себе. Подумайте про "геометричну" будову цього простору.

Отже, отримали символьну динамічну систему (Σ, σ), яку називають full shift. Кожна точка цієї системи є послідовністю нулів або одиниць. Словничок: цифри 0 та 1 називаються символами або буквами, а скінченні послідовності нулів або одиниць — блоками або словами.

Задача 4. Скільки точок в множині $\sigma^{-1}(x)$? Назвіть фіксовані і періодичні точки системи (Σ, σ). Доведіть, що множина транзитивних точок (Σ, σ) щільна.

Задача 5. Нехай $x, z \in \Sigma$. Доведіть, що $z \in \omega_T(x)$ тоді і тільки тоді, коли довільний початковий блок z можна знайти в x. Знайдіть $\omega_T(x)$, де $x \in \Sigma$ з $x_i = 1$, якщо $i = 10^k$ для якогось натурального k.

Нехай A замкнена, позитивно-інваріантна підмножина Σ. Розглянемо обмеження σ на A. Зрозуміло, що $(A, \sigma|_A)$ — знову динамічна система. Такі системи називають subshiftами. Зрозуміло, що $(\omega_T(x), \sigma|_{\omega_T(x)})$ і $(\overline{\mathrm{Orb}_T(x)}, \sigma|_{\overline{\mathrm{Orb}_T(x)}})$ є subshiftами.

Популярний клас subshiftів — subshiftи скінченного типу (SFT). Нехай $\{w_1, \ldots, w_k\}$ — деякий скінченний набір слів. Визначимо $X \subset \Sigma$ як множину всіх x таких, що жодне з слів w_i не можна знайти в записі x.

Задача 6. Доведіть, що фазовий простір subshiftа скінченного типу — позитивно-інваріантна, замкнена множина, тобто що subshift справді визначено коректно.

Задача 7. Доведіть, що в кожному непорожньому SFT знайдеться періодична точка.

Нехай (X, T) — динамічна система. (X, T) називається мінімальною, якщо не існує замкненого позитивно-інваріантного непорожнього $A \subset X$ такого, що $A \neq X$.

Задача 8. Чи є (Σ, σ) мінімальною? Чи може система з відрізком $[0, 1]$ в якості фазового простору бути мінімальною?

Задача 9. Доведіть, що система мінімальна тоді і тільки тоді, коли кожна точка транзитивна. Зрозуміти, що ірраціональний поворот кола є мінімальною системою.

Задача 10. Доведіть, що існує мінімальний subshift.

Додому

Задача 1. Доведіть, що множина періодичних точок (Σ, σ) є щільною. (Щільною називається така множина метричного простору, що її замикання дорівнює всьому простору.)

Задача 2. Нехай $P \subset \mathbb{N}$. Розглядається $\Lambda = \{x \in \Sigma : \ x_i = x_j = 1 \implies |i-j| \in P\}$ (тобто множина всіх послідовностей нулів і одиниць таких, що якщо на місцях i, j стоять одинички, то $|i-j| \in P$). Доведіть, що Λ замкнена, позитивно-інваріантна підмножина Σ. У випадку, якщо $P = \{10^k + s : \ k \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq k\} = \{11, 101, 102, 1001, 1002, 1003, \dots, \}$ доведіть транизитивність відповідного subshifta $(\Lambda, \sigma|_\Lambda)$.

Задача 3. Доведіть, що якщо система (X, T) є транзитивною, то T — сюр'єктивне.

Задача 4. (Топологічна ентропія) Дано динамічну систему (X, T) (простір X наділений метрикою d.) Для $n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ множина $E \subset X$ називається (n, ϵ)-розділеною, якщо для довільних різних $x, y \in E$ існує $0 \leq i \leq n-1$ таке, що $d(T^i x, T^i y) > \epsilon$. Нехай $S(n, \epsilon)$ — найбільша можлива кількість точок в (n, ϵ)-розділеній множині. Топологічна ентропія системи визначається за формулою

$$h(T) = \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log_2 S(n, \epsilon).$$

Знайдіть ентропію (Σ, σ).