

Розв'язуємо задачі

1. Для додатних чисел a, b, c, d довести нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

2. Розв'язати систему в дійсних числах

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x_1} = x_2 + x_3 + \dots + x_{10} \\ \frac{1}{x_2} = x_1 + x_3 + \dots + x_{10} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{x_{10}} = x_1 + x_2 + \dots + x_9. \end{array} \right.$$

3. Назвемо натуральне число дивовижним, якщо воно має вигляд $a^b + b^a$ для деяких натуральних a і b . Наприклад, число 57 — дивовижне, бо $57 = 2^5 + 5^2$. Чи є число 2011 дивовижним?
4. Довести, що число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ — ірраціональне.
5. Таблицю 2011×2011 заповнили числами 1 і -1 так, що в кожному рядку і в кожному стовпчику добуток чисел дорівнює 1 . Скількома способами можна це зробити?
6. Чи можна у квадраті 7×7 зафарбувати декілька клітин так, щоб в кожному рядку і в кожному стовпчику виявилось рівно три зафарбовані клітинки?
7. Назвемо мостом таке ребро у графі, після вилучення якого кількість компонент зв'язності графа збільшується. а) Побудувати зв'язний граф, у якого кожне ребро буде мостом. б) Довести, що в дереві кожне ребро є мостом.