Задачі на зимові канікули

Візьми і зроби!

1. У тенісному турнірі беруть участь n країн, від кожної країни – по одному спортсмену із його тренером. Деякі країни-учасники раніше вже проводили спільні турніри та тренування, такі країни назвемо «дружніми». Учасників турніру треба поселити у будиночки так, щоб були виконані такі умови:
   a. В кожному будиночку можуть мешкати або тільки тренери, або тільки спортсмени;
   b. Кожний тренер має жити в будиночку із тренерами із дружніх країн, а спортсмени із дружніх країн мають мешкати у різних будиночках.

   Якої найменшої кількості будиночків гарантовано вистачить, щоб виконати ці дві умови?

2. На клітчастій дошці 10×10 вздовж сторін клітинок намальовані M прямокутників, при цьому жоден прямокутник не знаходиться всередині іншого. Доведіть, що M може бути більше за 300, але не може бути більше за 600.
3. Пітерс загадав натуральне число $A \leq 100$. Такер намагається його вгадати. Він обирає два натуральних числа B та C, що менші за 100, і задає питання: «Чому дорівнює найбільший спільний дільник $A + B$ та C ?» Доведіть, що Такер зможе вгадати число, задавши не більш ніж 7 запитань.
4. У вершинах правильного 2014-кутника довільним чином розставили числа від 1 до 2014. Два числа можна поміняти місцями, якщо вони відрізняються на 1. Після виконання декількох таких операцій кожне число змістилося в сусідню вершину за годинниковою стрілкою. Доведіть, що в якийсь момент мінялися місцями числа, що стояли у діаметрально протилежних вершинах.
5. У фірми є n співробітників, кожний з яких має зарплатню $a_i \in N$, $1 \leq i \leq n$. Керівник вирішив кожного місяця підвищувати їм зарплатню таким чином: одному на 1, іншому на 2, ..., останньому на n (при цьому порядок, у якому працівники отримують підвищення, може бути різним). За яких умов на числа a_i, $1 \leq i \leq n$, він зможе за скінченну кількість кроків зробити зарплатню в усіх однаковою?
6. Дана квадратна таблиця, в кожній клітинці записане дійсне число. Відомо, що в кожному рядку сума двох найбільших чисел рівна a, а в кожному стовпчику таблиці сума двох найбільших чисел рівна b. Доведіть, що $a = b$.
7. По колу стоять 100 чисел, при цьому сусідні відрізняються не більше ніж на 1. Доведіть, що ці числа можна розбити на 50 пар, які також можна буде розставити по колу так, щоб суми у сусідніх парах відрізнялися не більше ніж на 1.
8. Заданий повний орієнтований граф G (тобто будь-які дві його вершини з'єдані одним орієнтованим ребром). Усі вершини G розбили на дві множини A та B, які перетинаються рівно по одній вершині. Нехай N - кількість шляхів (шлях -

послідовність вершин, в якій з кожної вершини, крім останньої, виходить ребро у наступну), що проходять через кожну вершину G по одному разу . Кількість шляхів, що проходять тільки по вершинах з A, по кожній рівно один раз, позначимо N_1, аналогічну кількість для множини B - N_2. Доведіть, що $N \geq N_1 N_2$.

9. Доведіть, що для довільних натуральних чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2015}, y_1, y_2, \dots, y_{2015}$ значення виразу $(2x_1^2 + 3y_1^2)(2x_2^2 + 3y_2^2) \dots (2x_{2015}^2 + 3y_{2015}^2)$ не може бути квадратом натурального числа.
10. Натуральне число M ділиться націло на $N = 11 \dots 1$ - всього k одиниць. Доведіть, що сума цифр числа M не менша за k.
11. Нехай $\tau(n)$ – кількість дільників числа n. Довести, що існує нескінченно багато натуральних N таких, що $(\tau(N) + \tau(N+1) + 1) \vdots 3$.
12. Нехай цілі числа a, b більші за модулем від 1. Відомо, що існує нескінченна кількість натуральних чисел n, для кожного з яких знайдеться таке натуральне число m, що число $a^m + b$ ділиться на число $a^n + 1$. Доведіть, що існує натуральне k, для якого виконується рівність: $|b| = |a|^k$.
13. Нехай n - натуральне число. Доведіть, що число $10^{10^{10^n}} + 10^{10^n} + 10^n - 1$ складене.
14. Для довільних дійсних чисел $x, y, z \in [0,1]$ доведіть нерівність :
$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq \sqrt{8(x+y)(y+z)(x+z)}$$
15. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:
$$\frac{x}{x+y+z} \cdot \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)^2} + \frac{y}{x+y+z} \cdot \frac{(y+z)(y+x)}{(z+x)^2} + \frac{z}{x+y+z} \cdot \frac{(z+x)(z+y)}{(x+y)^2} \geq 1$$
.
16. Нехай P - многочлен з цілими коефіцієнтами, a - ціле число. Для кожного натурального $m > 1$ визначимо $P_m(x) = P(P_{m-1}(x))$, де $P_1(x) = P(x)$. Виявилося, що для деякого натурального n: $P_n(a) = a$. Доведіть, що тоді $P(P(a)) = a$.
17. Про числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ відомо, що $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ та $\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$. Доведіть, що $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$

Задачі на системи лінійних рівнянь:

1) В кожній клітинці на границі прямокутної таблиці записане число. Довести, що існує і єдина така розстановка чисел всередині таблиці, що число у кожній внутрішній клітині таблиці дорівнює середньому арифметичному чисел у чотирьох сусідніх клітинках.

2) По колу записані 123 а) раціональних, б) дійсних числа, не всі з яких дорівнюють нулю. Довести, що можна викреслити два сусідні числа так, що ті що лишилися неможливо розбити на дві групи, суми чисел в яких рівні.

3) Про дійсні числа $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ відомо, що якщо прибрати довільне число з цього набора, усі інші можна буде розбити на дві групи по n чисел у кожній, так щоб суми чисел у групах були також рівними. Доведіть, що усі числа в наборі рівні.

4) Нехай k, m, n – натуральні числа $k, m < n$, та $(k, m) = 1$. Про набір дійсних чисел $a_1 a_2, \dots, a_n$ відомо, що для довільних індексів $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ знайдуться такі індекси $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_m \le n$ для яких $\dfrac{a_{i_1}+a_{i_2}+..+a_{i_k}}{k} = \dfrac{a_{j_1}+a_{j_2}+..+a_{j_m}}{m}$.

Доведіть, що усі числа у цьому наборі рівні.