Матбій «Веселих канікул!»

1. Про натуральні числа a, b, c відомо, що $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на $a + b + c$. Доведіть, що існує нескінченно багато n, для яких $a^n + b^n + c^n$ ділиться на $a + b + c$

2. Нехай ABC — правильний трикутник. На стороні AC взято точку D. Бісектриса кута $\angle ABD$ перетинає пряму, що проходить через A паралельно BC в точці E. Доведіть, що $BD = AE + CD$.

3. На площині є n точок загального положення. Для кожного трикутника з вершинами в цих точках підрахували кількість точок, що лежать всередині цього трикутника. Доведіть, що середнє арифметичне цих чисел не більше $\frac{n}{4}$.

4. a, b — такі ненульові дійсні числа, що число

$$\lfloor an + b \rfloor$$

є парним цілим числом при довільному натуральному n. Доведіть, що a — парне ціле число.

5. Нехай $f(n)$ — добуток усіх простих чисел, що менші за n. Доведіть, що $f(n) > n$ для $n > 3$.

6. Антон зібрав з яблуні 300 яблук, кожні два з яких відрізняються за вагою не більше, ніж у три рази. Доведіть, що Антон зможе їх розкласти в пакети по чотири яблука так, щоб довільні два пакети відрізнялися за вагою не більше, ніж в півтора рази.

7. В КНУ вчиться $2N$ хлопців і 2014 дівчат. Для кожної пари дівчат відомо, що кількість хлопців, які знайомі з *рівно однією* з них — N. Доведіть, що кількість хлопців, знайомих з усіма дівчатами не перевищує $\frac{N}{1007}$.

8. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC, M — середина AC, T — центр описаного кола трикутниа AOC. На сторонах AB і BC вибрано точки D і E відповідно так, що $\angle BDM = \angle BEM = \angle ABC$. Доведіть, що $BT \perp DE$.