Районна олімпіада

Умови та розв'язки по усіх класах

6 клас

1. Розставити між деякими з цифр 1111111 знаки $''+''$ $''-''$ таким чином, щоб вийшов вираз з сумою 100.

Відповідь: так, можна.

Розв'язання.

$$111 - 11 + 1 - 1 = 100$$

2. Знайдіть принаймні одне число, вигляду $\overline{0,abc}$, де a, b, c цифри, яке має таку властивість. Якщо це число округлити до сотих, потім помножити на 2 та знову округлити до цілих одержимо число 1. А якщо число $\overline{0,abc}$ спочатку округлити до десятих, помножити на 2 і знову округлити до цілих, то одержимо число 0.

Відповідь: наприклад, число 0,249.

Розв'язання. Якщо зробити перші дії за першим варіантом округлення, то маємо

$$0,249 \to 0,25 \to 0,5 \to 1.$$

Якщо за другим, то

$$0,249 \to 0,2 \to 0,4 \to 0.$$

3. Знайти 6 різних прямокутників однакової площі, у кожного з яких сторони задаються цілим числом сантиметрів, при цьому не можна знайти сьомий прямокутник, який задовольняє ці умови, тобто відмінний від 6 знайдених, має сторони, що задаються цілим числом сантиметрів і площу, однакову із заданими.

Відповідь: потрібних прикладів багато, наприклад, прямокутники з такими розмірами: 1×72, 2×36, 3×24, 4×18, 6×12, 8×9.

Розв'язання. Зрозуміло, що площу 72 більше не може мати жоден подібний від перелічених прямокутник. І взагалі, достатньо знайти число, яке має рівно 12 різних цілих дільників, одним з таких є число 72.

4. Магічним квадратом четвертого порядку називається квадрат 4×4, який заповнений різними числами, при цьому рівними є суми чисел у кожного рядку, стовпчику та великих діагоналях. Олеся хоче скласти такий квадрат, розмістивши у ньому числа $1, 2, \ldots, 16$. Вона почала з того, що помістила число 1 у лівий верхній кут, а числа 2 і 3 поруч з ним у сусідньому рядку та стовпчику. Як ій треба далі розмістити решту чисел, щоб одержати магічний квадрат?

Відповідь: вона не зможе далі його заповнити.

Розв'язання. Оскільки сума усіх чисел дорівнює $1 + 2 + \ldots + 16 = 136$, то сума у кожному рядку, стовпчику дорівнює $\frac{1}{4} \cdot 136 = 34$. Тобто, у рядку з 1 та 2 треба розмістити 2 числа з сумою 31, тобто це можуть бути лише числа 15 та 16. У стовпчику з 1 та 3 повинно бути 2 числа з сумою 30, це можуть бути лише числа 14 та 16, але 16 вже треба використати у рядку з 1 та 2, таким чином побудови магічного квадрату четвертого порядку досягти не вдасться.

7 клас

1. Три дробі записани поруч: $\frac{5}{32}$ $\frac{11}{32}$ $\frac{15}{32}$. Чи можна перед першим дробом, між ними, та вкінці третього дробу розставити знаки чотирьох арифметичних дій $''+'', ''-'', ''\cdot'', '':''$, а також дужки таким чином, щоб значення одержаного виразу стало більшим, ніж 1?

Відповідь: так, можна.

Розв'язання. Наприклад знаки та дужки можна розставити таким чином:

$$-\frac{5}{32} : \left(\frac{11}{32} - \frac{15}{32}\right) = \frac{5}{4} > 1.$$

2. Знайдіть 5 послідовних трицифрових числа, перше з яких ділиться на 2, друге – на 3, третє – на 4, четверте ділиться на 5, і п'яте ділиться на 6.

Відповідь: наприклад, числа 722, 723, 724, 725, 726.

Розв'язання. Умову задовольняють послідовні числа 2, 3, 4, 5 та 6, але, нажаль, вони не є трицифровими. Якщо обчислити число $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, то умову задовольняють числа $720 + 2, 720 + 3, 720 + 4, 720 + 5, 720 + 6$.

3. Відмінники Леся та Андрійко протягом семестру одержали з математики лише оцінки "12", "11" та "10". Разом усіх оцінок на двох вони одержали 51, причому $\frac{4}{9}$ від усіх Лесиних оцінок склали оцінки "12", а $\frac{3}{8}$ усіх Андрійкових оцінок були оцінки "11". Чому дорівнює середнє арифметичне усіх оцінок Лесі, якщо відомо, що оцінок "12" та "11" у Лесі та Андрійка однакова кількість?

Відповідь: $\frac{101}{9}$.

Розв'язання. З умови випливає, що кількість оцінок у Лесі складає $9n$, а у Андрійка – $8k$, де n, k – цілі невід'ємні числа. Тоді із умови на загальну кількість оцінок маємо рівняння $9n + 8k = 51$. Простим перебором знаходимо, що це рівняння задовольняють лише числа $n = 3, k = 3$. Тобто, у Лесі було 27 відмінних оцінок, а у Андрійка – 24. Тоді у Лесі та Андрійка по $\frac{4}{9} \cdot 27 = 12$ оцінок "12" та по $\frac{3}{8} \cdot 24 = 9$ оцінок "11". Таким чином у Лесі разом 27 оцінок, серед яких 12 оцінок "12" та 9 оцінок "11", тобто оцінок "10" у неї рівно 6. Зазначимо, що у Андрійка оцінок "10" рівно 3. Таким чином середній бал у Лесі з математики складає $\frac{12 \cdot 12 + 9 \cdot 11 + 6 \cdot 10}{27} = \frac{303}{27} = \frac{101}{9}$.

4. Знайти 3 різних прямокутних паралелепіпеди однакового об'єму, у кожного з яких сторони задаються цілим числом сантиметрів і усі ці числа є попарно різними, при цьому не можна знайти четвертий прямокутний паралелепіпед, який задовольняє ці умови, тобто має однаковий об'єм з трьома попередніми та має сторони, що задаються цілим числом сантиметрів, і ці числа попарно різні та не співпадають із сторонами раніше знайдених паралелепіпедів.

Відповідь: потрібних прикладів багато, наприклад, прямокутні паралелепіпеди з такими розмірами: $1 \times 16 \times 24$, $2 \times 6 \times 32$, $4 \times 8 \times 12$.

Розв'язання. Такий самий об'єм 384 більше не може мати жоден подібний від перелічених прямокутний паралелепіпед, оскільки, якщо виписати усі дільники цього числа:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 384,$$

то легко побачити, що найменші невикористані з них у наведеній відповіді – це 3, 48 та 64, але вже їх добуток більший від потрібного об'єму.

5. Чи можна підібрати 2010 цілих чисел добуток яких дорівнює 2, а сума дорівнює нулю?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Очевидно, що ці числа повинні утворювати такий набір – одне число дорівнює ± 2, а решта 2009 чисел – це ± 1, бо інакше одержати добуток 2 неможливо. Але тепер зрозуміло, що сума подібних чисел завжди непарна, оскільки в неї входять рівно одне парне та 2009 непарних. Оскільки 0 – парне число, то звідси випливає наведена відповідь.

8 клас

1. Чи можна підібрати 2010 цілих чисел добуток яких дорівнює 4, а сума дорівнює нулю?

Відповідь: так, можна.

Розв'язання. Наприклад такі числа: 1002 числа 1, 1006 чисел -1, а також два числа 2.

2. Дійсні числа a, b, c задовольняють умову:

$$(2b - a)^2 + (2b - c)^2 = 2(2b^2 - ac).$$

Доведіть, що число b є середнім арифметичним чисел a і c.

Розв'язання. Перенесемо усе в ліву частину, розкриємо усі дужки та зведемо подібні, тоді одержимо такий вираз:

$$4b^2 - 4ba - 4bc + a^2 + 2ac + c^2 = 0,$$

далі перетвореннями одержимо потрібне:

$$4b^2 - 4b(a + c) + (a + c)^2 = 0,$$

$$(2b - (a + c))^2 = 0 \qquad \Rightarrow b = \frac{a + c}{2},$$

ощо й треба було довести.

3. Знайти усі такі прості числа p, для яких існують різні двоцифрові числа $\overline{ab}$ та $\overline{ba}$, кожне з яких ділиться на p.

Відповідь: 2 та 3.

Розв'язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що $\overline{ab} > \overline{ba}$, крім того, жодна з цифр не дорівнює нулеві, оскільки обидва числа – двоцифрові та вони різні, бо задані числа - різні за умовою. Розглянемо різницю $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$, яка також повинна ділитись на p. Оскільки $a - b \leq 8$, то можливі варіанти для простого числа p такі: $2, 3, 5, 7$. Для випадку 2 і 3 легко підібрати відповідні числа: наприклад 24 та 36.

$p = 5$ не може бути, оскільки воно повинно закінчувати на 0 та 5, але 0 не може бути серед цифр a, b, крім того обидві цифри різні. Тобто число 55 бути не може відповіддю.

$p = 7$ повинно ділити число $9(a - b)$, тобто число $(a - b)$, але для цього є лише дві можливості $\overline{ab} = 81$ або $\overline{ab} = 92$. Жодне з них умові кратності 7 не задовольняє, тому це числа також не підходить.

4. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що трикутники ABC і ABD мають однакові периметри. Також однакові периметри мають трикутники ACD та BCD. Доведіть, що відрізки AO та BO рівні.

Розв'язання. Якщо записати рівності, що випливають з рівності периметрів, то матимемо, що

$$AB + AC + CB = AB + BD + DA \qquad AC + CD + DA = BC + CD + DB,$$

$$AC + CB = BD + DA \qquad AC + DA = BC + DB,$$

якщо відняти ці рівності, то будемо мати, що $CB - DA = DA - BC$, або $BC = AD$. Якщо ті рівності додати, то $2AC + CB + DA = 2BD + DA + BC$, або $AC = BD$ (рис.1).

Таким чином за трьома сторонами $\triangle ACD = \triangle BCD$, $\triangle BDA = \triangle ABC$, тому $\angle ACB = \triangle BDA$, $\angle CAD = \triangle CBD$, тобто $\triangle AOD = \triangle BOC$, звідки й випливає, що $AO = BO$.

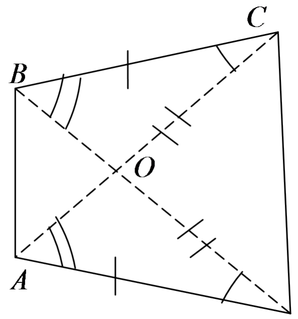

Рис.1

5. Чи можна розбити числа $1, 2, \ldots, 15$ на три групи таким чином, щоб сума чисел у першій групі ділилась на 13, у другій групі – на 25, а у третій – ділилась на 37?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Припустимо, що ми це зробили, тоді сума чисел у групах дорівнює $11A$, $25B$ та $37C$ відповідно. Сума усіх 15 чисел дорівнює $S = (1 + 15) + (2 + 14) + \ldots + (7 + 9) + 8 = 16 \cdot 7 + 8 = 120$. Тобто маємо рівність: $13A + 25B + 37C = 120$. Звідси маємо, що $(A + B + C) + 12(A + 2B + 3C) = 12 \cdot 10$. Тобто $A + B + C$ ділиться на 12, звідки

$A+B+C \geq 12$, але тоді загальна сума усіх чисел у трьох групах складає $13A+25B+37C \geq 13(A+B+C) \geq 13 \cdot 12 = 156 > 120$. Таким чином одержали суперечність, яка свідчить, що наше припущення хибне.

9 клас

1. Доведіть, що при будь-яких натуральних a, b, c значення виразу $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ ділиться на значення виразу $a + b + c$.

Розв'язання. Це можна зробити шляхом тотожних перетворень, або розглянути більший вираз у вигляді многочлен відносно однієї змінної, наприклад, a. Після зведення подібних та групування подамо його у вигляді: $a^4 + a^2(-2b^2 - 2c^2) + (b^2 - c^2)^2$. Далі просто розділимо його в стовпчик на двочлен $a + (b + c)$ і одержимо відповідь

$$a^4 + a^2(-2b^2 - 2c^2) + (b^2 - c^2)^2 = (a+b+c)(a^3 - a^2(b+c) - a(b+c)^2 + (b-c)^2(b+c),$$

звідки й випливає твердження задачі.

2. Нехай ABC – гострокутний трикутник. Пряма, яка паралельна стороні BC, перетинає сторони AB та AC у точках D та E відповідно. Описане навколо $\triangle ADE$ коло перетинає відрізок CD в точці $F \neq D$. Доведіть, що трикутники AFE та CBD подібні.

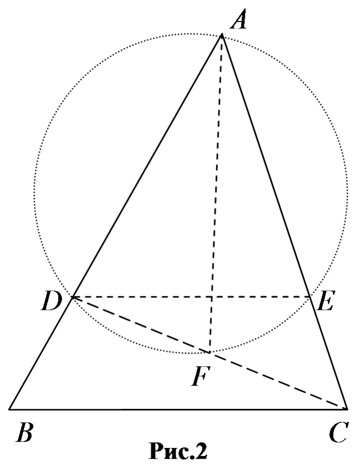

Рис.2

Розв'язання. Оскільки $DC \parallel DE$, то $\angle DCB = \angle CDE$ (рис.2), з вписаних у коло кутів маємо рівність $\angle FDE = \angle FAE$, тому $\angle DCB = \angle CDE = \angle FDE = \angle FAE$. Аналогічно $\angle ABC = \angle ADE = \angle AFE$, звідки у вказаних трикутників по 2 кута рівні, а тому вони подібні.

3. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2010}$ належать проміжку $[0, 1]$. Доведіть нерівність:

$$x_1x_2 \ldots x_{2010} + (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{2010}) \leq 1.$$

При яких значеннях $x_1, x_2, \ldots, x_{2010}$ може досягатись рівність?

Відповідь: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2010} = 1$, або $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2010} = 0$.

Розв'язання. Оскільки для довільних чисел $a, b \in [0, 1]$ виконується нерівність $ab \leq a$, то

$$x_1x_2 \ldots x_{2010} + (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{2010}) \leq 1 \leq x_k + (1 - x_k) = 1,$$

для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, 2010\}$. Нерівність доведена.

Внаслідок довільності k рівність може бути лише за умови $x_k \in \{0, 1\}$, звідки й випливає наведена відповідь, оскільки усі x_k повинні бути рівними між собою.

4. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність

$$p^2 - q^2 = 4q - p.$$

Відповідь: $p = 3, q = 2$.

Розв'язання. Якщо переписати цю рівність у такому вигляді $p(p + 1) = q(q + 4)$, то можливі два випадки.

1) $p = q$, тоді $p = 0$, що неможливо.

2) $p \neq q$, тоді $p + 1$ ділиться на q, а $q + 4$ ділиться на p. Покладемо $p + 1 = nq$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді рівняння набуває вигляду $(nq - 1)nq = q(q + 4)$ або $n^2q - n = q + 4$, таким чином $q = \frac{4+n}{n^2-1} \geq 2$, звідки повинна виконуватись нерівність $2n^2 - n - 2 \leq 0$, тому$n = 1$, і $p + 1 = q$, звідки очевидно, що прості числа відрізняються на 1, тому це 2 та 3. Перевіркою переконуємось, що $p = 3, q = 2$ задовольняє умову.

5. Для якого найменшого значення n існує опуклий n-кутник, у якого синуси усіх кутів рівні, а усі сторони мають різну довжину.

Відповідь: $n = 5$

Розв'язання. Якщо синуси усіх двох кутів рівні, то ці кути або рівні, або вони їх сума дорівнює 180°. Таким чином при $n = 3$ принаймні два кути рівні, тобто трикутник рівнобедрений, а це суперечить умові задачі.

При $n = 4$ маємо, що якщо усі кути рівні, то вони дорівнюють по 90°, тобто це прямокутник і він має рівні сторони. Якщо три кути рівні між собою, позначимо їх α, тоді четвертий дорівнює $180° - \alpha$ і маємо рівність: $3\alpha + 180° - \alpha = 360°$. Звідси також маємо, що усі кути по 90°. Якщо рівні дві пари кутів, то добре відомо, що такий чотирикутник або паралелограм, або рівнобічна трапеція. Але у кожному з цих випадків маємо, що цей чотирикутник має рівні сторони, тобто не задовольняє умови.

При $n = 5$ неважко побудувати потрібний приклад. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ з кутами 60° та 120° (рис.3), у якої основи дорівнюють 10 та 15, а бічні сторони по 5. Відріжемо від цієї трапеції рівносторонній трикутник FED зі стороною 1. Тоді маємо п'ятикутник $ABCEF$, у якого чотири кути по 120° та один кут – 60°. А його сторони за побудовою - 5, 10, 4, 1, 14.

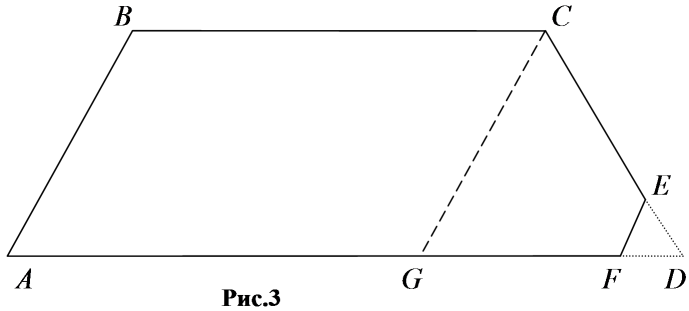

Рис.3

10 клас

1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + 2 = 2\sqrt{y+1}, \\ y + 2 = 2\sqrt{x+1}, \end{cases}$

Відповідь: $x = y = 0$.

Розв'язання. Додамо ці два рівняння, перенесемо усі доданки в ліву частину і одержимо, що

$$Sx + 2 + y + 2 - 2\sqrt{y+1} - 2\sqrt{x+1} = 0,$$

$$\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y+1} - 1\right)^2 = 0.$$

Звідси єдиним можливим розв'язком можуть бути $x = y = 0$. Перевіркою переконуємось, що ці значення задовольняють систему рівнянь, тобто є шуканими розв'язками.

2. З'ясуйте, яких чисел серед $1, 2, \ldots, 2010$ більше – таких, що кратні принаймні одному з чисел 3 або 4, чи усіх інших?

Відповідь: однакова кількість.

Розв'язання. Розглянемо для довільного натурального n розглянути числа $1, 2, \ldots, 12n$. Кожне третє з цих чисел кратне 3, кожне четверте – кратне 4, але там спільних чисел, тобто тих, що підраховані двічі, кожне дванадцяте. Таким чином, чисел, що кратні або 3, або 4 серед цих рівно $4n + 3n - n = 6n$, тобто рівно половина. Таким чином від 1 до 2004 рівно половина кратна 3 чи 4. залишається порахувати серед решти чисел. 2007, 2008 та 2010 кратні 3 або 4, решта – ні. Таким чином, з 6 чисел, що лишились рівно 3, тобто половина, задовольняє умові кратності 3 та 4. Звідси й випливає наведена відповідь.

3. Знайдіть усі пари простих чисел p і q, які задовольняють рівність

$$20q + 2 = p^3 + q^2 p.$$

Відповідь: Відповідь: $p = 3, q = 5$.

Розв'язання. Перепишемо це рівняння у такому вигляді: $q(20 - pq) = p^3 - 2$, оскільки для простого p права частина додатна, то $pq < 20$. Звідси випливає, що достатньо зробити невеликий перебір можливих простих чисел, які задовольняють цю умову.

Якщо $p = 2$, то $20q - 2q^2 = 6$, звідки можливі значення для q – це 2 та 3, жодне з яких не задовольняє умову.

Якщо $q = 2$, то маємо рівняння $p^3 + 4p = 42$, яке не має розв'язків у простих числах.

Залишається перевірити такі пари: (3,3), (3,5) та (5,3). Серед них і знаходимо єдину відповідь: $p = 3, q = 5$.

4. Трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ такі, що $\sin A_1 = \cos A$, $\sin B_1 = \cos B$, $\sin C_1 = \cos C$. Знайдіть градусну міру найбільшого з кутів A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Відповідь: $135°$

Розв'язання. Зрозуміло, що A, B і C – гострі кути, оскільки синуси кутів трикутника завжди додатні, тому косинуси кутів $\triangle A_1B_1C_1$ додатні, звідки й кути гострі. Нехай A_1 – найбільший з кутів трикутника $\triangle A_1B_1C_1$. Розглянемо два випадки:

1) A_1 – гострий кут. Тоді можна записати $\angle A_1 = 90° - \angle A$, $\angle B_1 = 90° - \angle B$, $\angle C_1 = 90° - \angle C$, Додамо почленно ліві і праві частини трьох записаних рівностей. Маємо:

$$180°\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 270° - (\angle A + \angle B + \angle C) = 270° - 180° = 90°.$$

Одержали суперечність, отже, випадок, коли A_1 – гострий кут є неможливим.

2) A_1 – тупий кут, тоді інші кути цього трикутника гострі і маємо, що $\angle A_1 = 90° + \angle A$, $\angle B_1 = 90° - \angle B$, $\angle C_1 = 90° - \angle C$. Звідси

$$180°\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 270° + \angle A - \angle B - \angle C).$$

Тобто

$$\angle B + \angle C - \angle A = 90°.$$

З урахуванням суми кутів трикутника, отримуємо $\angle A = 45°$, тоді $\angle A_1 = 135°$.

5. Квадрати $ABCD$ і $DEFG$ розташовані на площині таким чином, що точка E належить відрізку CDб а точки F і G не належать квадрату $ABCD$. Знайдіть градусну міру меншого кута між прямими AE та BF.

Відповідь: $45°$

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язувати геометрично, за допомогою векторів. Ми наведемо найбільш простий аналітичний метод. Визначимо систему координат таким чином, щоб точка A стала початком координат, і координатні осі йдуть по сторонах квадрату, як це показано на рис.4. Тоді нехай сторона квадрату $ABCD$ дорівнює b, а квадрату $DEFG$ – a. Тоді легко обчислити кутові коефіцієнти прямих AE та BF, це відповідно $k_1 = \frac{a}{b}$, $k_2 = \frac{a-b}{a+b} = -\frac{b-a}{a+b}$.

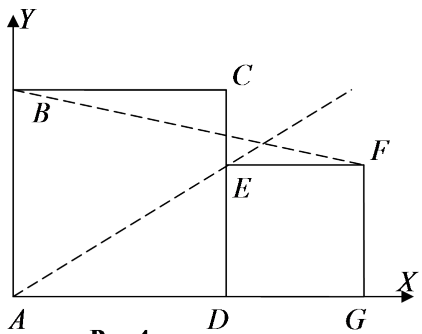

Рис.4

За відомою формулою обчислення кутового коефіцієнту між прямими дорівнює (ця формула є простою інтерпретацією формули різниці тангенсів)

$$k = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b+a}}{1 - \frac{a(b-a)}{b(b+a)}} = 1.$$

Таким чином тангенс кута між цими прямими дорівнює 1.

<u>11 клас</u>

1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} (x+y)(x^2+xy+y^2) = 9y^3, \\ (x-y)(x^2-xy+y^2) = 7y^3, \end{cases}$

Відповідь: $x = y = 0$.

Розв'язання. Перемножимо ліві та праві частини цієї системи і одержимо за формулою різниці та суми кубів, що $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = 63y^6$ звідки неважко одержати, що $x^6 - y^6 = 63y^6$, або $x^6 = 64y^6 \Leftrightarrow x = \pm 2y$. якщо це підставити у перше рівняння, то одержимо, що $21y^3 = 9y^3$ або $-3y^3 = 9y^3$. З кожного з яких ми одержуємо, що $y - 0$, а далі й $x = 0$.

2. Випадковим чином вибираються три різні непарні цифри від 1 до 9. Після цього їх розташовують у порядку зростання. З якою імовірністю обрані числа утворюють арифметичну прогресію.

<u>Відповідь</u>: $\frac{2}{5}$.

<u>Розв'язання</u>. Усього обрати 3 цифри з п'яти непарних 1, 3, 5, 7, 9 можна $C_5^3 = 10$ способами. Це неважко перебрати безпосередньо. Порахуємо, скільки там є арифметичних прогресій.

З першим членом прогресії 1 це – 1, 3, 5 та 1, 5, 9.

З першим членом прогресії 3 це – 3, 5, 7.

З першим членом прогресії 5 це – 5, 7, 9.

Таким чином у 4 випадках буде утворена прогресія, за формулою обчислення імовірності маємо шуканий результат $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

3. У шестицифровому числі Леся поставила знак добутку після перших трьох цифр і виявилось, що цей добуток двох трицифрових чисел у сім разів менший від початкового числа. Знайдіть усі можливі шестицифрові числа, які задовольняють цю умову.

<u>Відповідь</u>: 143143.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо трицифрові числа, що утворюються першими та останніми трьома цифрами числа, відповідно через x та y. Тоді ми маємо таку рівність: $1000x + y = 7xy$. У цьому виразі два доданки діляться на x, тому і останній також повинен ділитись на нього, тобто $y = kx$. Оскільки за умовою обидва цих числа трицифрові, то $1 \le k \le 9$. Якщо тепер скоротити на x одержану рівність, будемо мати, що $1000 + k = 7kx$. Таким чином число $1000 + k$ повинно бути кратним 7, а це відбувається, якщо $1 \le k \le 9$ при $k = 1$ та $k = 8$. При $k = 1$ находимо, що $x = 143$. При $k = 8$ маємо $x = 72$ – не задовольняє умови, оскільки воно не є трицифровим. Таким чином знаходимо, що $y = kx = 143$ і маємо шукану відповідь: 143143.

4. Нехай ABC – гострокутний трикутник у якого $AB > AC$, точка D обрана на стороні AB таким чином, що $\angle ACD = \angle CBD$. Позначимо через E середину відрізку BD, а через S – центр описаного кола трикутника BCD. Доведіть, що точки A, E, S, C лежать на одному колі.

<u>Розв'язання</u>. З властивостей вписаних кутів $\angle CSD = 2\angle CBD$ (рис.5), з рівнобедреного трикутника CSD маємо, що $\angle SCD = \frac{\pi - \angle CBD}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle CBD$, тому

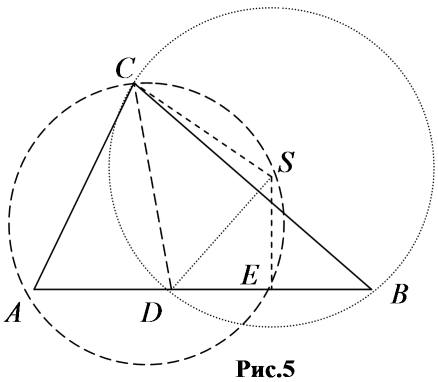

Рис.5

$$\angle ACS = \angle ACD + \angle DCS = \angle CBD + \frac{\pi}{2} - \angle CBD = \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки у чотирикутнику $ACSE$ два прямих кута, то він вписаний у коло і твердження доведене.

5. Додатні числа x, y, z задовольняють умову $xyz = 1$. Доведіть нерівність

$$x + y + z \le x^2 + y^2 + z^2.$$

<u>Розв'язання</u>. З нерівності між середнім арифметичним та середнім геометричним випливає, що $1 = xyz = \sqrt[3]{xyz} = \frac{x+y+z}{3}$. Тоді можна записати:

$$x + y + z = (xyz)(x + y + z) \le \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}{3}.$$

Враховуючи, що $xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2$ отримуємо

$$x + y + z \le \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}{3} \le \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{3} = x^2 + y^2 + z^2,$$

що й треба було довести.