III етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків

I тур

Умови та розв'язки по усіх класах

1-3 рівні (високий, середній, достатній)

7 клас

1. У виразі

$$12 - 11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$$

певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

Зауваження. Дужку виду "(" можна ставити лише перед числом, а дужку виду ")" лише після числа, наприклад, вирази $-4(-3-2)$ та $-(4-3-)2$ вважаються забороненими.

Відповідь:

$$12 - (11 - 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1) = 46.$$

Розв'язання. При будь-якій розстановці дужок у підсумковому результаті число 12 завжди буде із знаком $+$, а число 11 – із знаком $-$. Таким чином сума буде найбільшою, якщо усі інші числа будуть із знаком $+$, а для цього достатньо дужки розставити, як це показано у відповіді. Остаточне найбільше значення знаходимо простими підрахунками.

2. Знайдіть найменше натуральне число $n > 100$ таке, що серед чисел $n-100, n-99, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, n+100$ (усього 201 число) найбільшу суму цифр має число n. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 999.

Розв'язання. Розглянемо довільне число. Якщо його дві останні цифри замінити на 99, то сума цифр стане більшою. Тому шукане число закінчується на 99. Числа $99, 199, \ldots, 899$ умову не задовольняють, оскільки у цьому переліку кожне наступне число має суму цифр більшу від попереднього. А от число 999 шукане, оскільки його сума цифр дорівнює 27 і більша від будь-якого трицифрового, а серед наступних за ним 100 чотирицифрових чисел від 1000 до 1099, найбільшу суму цифр має число 1099, але ця сума цифр менша від суми цифр числа 999.

3. Кожна з дівчинок Оксана, Олеся, Оля та Олександра одержала прямокутник розміром 2010×10. Їм запропонували прямолінійним розрізом розрізати цей прямокутник на дві частини таким чином, щоб з цих частин, не накладаючи їх одна на другу, можна було скласти трикутник. Усі вони впоралися із завданням. Чи могли вони отримати чотири попарно різні трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

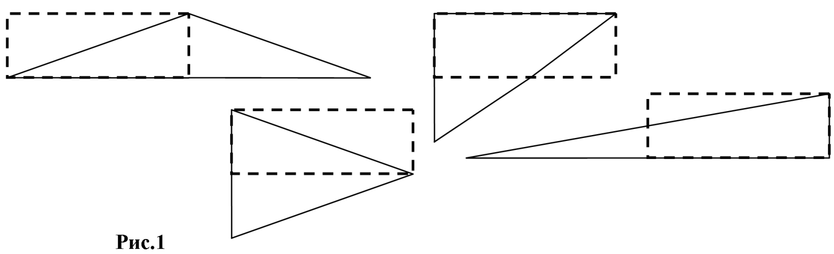
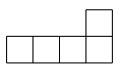


Рис.1

Відповідь: Так, могли, відповідні приклади показані на рис.1.

4. (Рубльов Богдан) Яку найбільшу кількість фігурок виду  можна розташувати у квадраті розміром 8×8 клітинок так, щоб вони не накладались одна на іншу? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 12 фігурок.

Розв'язання. Достатньо розглянути розташування 12 таких фігурок, як це показано на рис.2. Більше їх розташувати неможливо, оскільки 13 таких фігур складаються з $13 \cdot 5 = 65$ малих квадратиків, а великий квадрат містить їх лише $8 \cdot 8 = 64$.

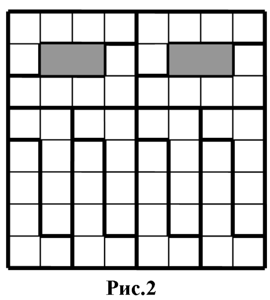


Рис.2

8 клас

1. У виразі

$$\underbrace{2010 - 2009 - 2010 - 2009 - 2010 - 2009 - \ldots - 2010 - 2009}_{2010\text{ чисел}}$$

певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

Зауваження. Дужку виду “(” можна ставити лише перед числом, а дужку виду “)” лише після числа, наприклад, вирази $-2010(-2009-2010)$ та $-(2010-2009-)2010$ вважаються забороненими.

Відповідь:

$$\underbrace{2010 - (2009 - 2010 - 2009 - 2010 - 2009 - \ldots - 2010 - 2009)}_{2010\text{ чисел}} = 4035077.$$

Розв'язання. При будь-якій розстановці дужок у підсумковому результаті перше число 2010 завжди буде із знаком $+$, а перше число 2009 – із знаком $-$. Таким чином сума буде найбільшою, якщо усі інші числа будуть із знаком $+$, а для цього достатньо розставити дужки, як це показано у відповіді. Найбільше значення знаходимо такими підрахунками:

$$\underbrace{2010 - (2009 - 2010 - 2009 - 2010 - 2009 - \ldots - 2010 - 2009)}_{2010\text{ чисел}} =$$

$$= 2010 - 2009 + \underbrace{2010 + 2009 + 2010 + 2009 + \ldots + 2010 + 2009}_{2008\text{ чисел}} =$$

$$= 1 + (2010 + 2009) \cdot 1004 = 4035077.$$

2. Олеся та Андрій кидають по одному разу стандартний гральний кубик. Знайдіть імовірність того, що кількість очок у Олесі більша від кількості очок, що випали у Андрія. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: $\frac{5}{12}$.

Розв'язання.

Усього можливих варіантів $6^2 = 36$, підрахуємо кількість варіантів, при яких Олеся може набрати більше очок.

Якщо у Олесі випадає 1, то така ситуація неможлива.

Якщо 2, то можливий лише варіант 1.

Якщо 3, то можливі варіанти 1 та 2.

Якщо 4, то можливі варіанти 1, 2 та 3.

Якщо 5, то можливі варіанти 1, 2, 3 та 4.

Якщо 6, то можливі варіанти 1, 2, 3, 4 та 5.

Загалом – 15 варіантів. Таким чином шукана імовірність є $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

3. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, \ldots, n^2$ можна вибрати 4 попарно різних числа a, b, c, d, для яких виконується рівність $ab = cd$. Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: при усіх $n \geq 3$.

Розв'язання. Якщо серед заданих чисел є така четвірка різних чисел $n, 2n, 3n, 6n$, то числа вибрати можна, оскільки $n \cdot 6n = 2n \cdot 3n$. Такі числа належать множині $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ за умови $n^2 \geq 6n$, або $n \geq 6$, таким чином залишилось розглянути випадки $n < 6$.

$n = 5$ маємо числа $5, 6, 7, \ldots, 25$ і з добутку $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ знаходимо шукані числа – це пари чисел $2 \cdot 3 = 6$ і $4 \cdot 5 = 20$ та інша пара $2 \cdot 4 = 8$ і $3 \cdot 5 = 15$, добутки яких задовольняють потрібні умови.

Так само при $n = 4$ маємо числа $4, 5, 6, \ldots, 16$, шукані дві пари – це 4 та 15, а також 6 та 10.

При $n = 3$ серед чисел $3, 4, 5, \ldots, 9$ знаходимо шукані дві пари – це 4 та 6, а також 3 та 8.

При $n = 1, 2$ чисел просто не вистачає, щоб утворити потрібні дві пари.

4. Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Пряма AO перетинає сторону BC в точці D так, що $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Знайдіть кути трикутника ABC. Відповідь обґрунтуйте.

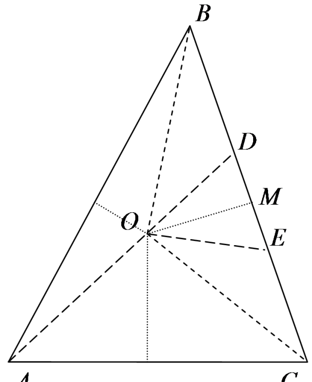


Рис.3

Відповідь: Кути трикутника $\angle ABC = 45°, \angle BAC = 60°, \angle ACB = 75°$.

Розв'язання. Позначимо через E та M середини відрізків CD та BC відповідно. Тоді з умови $BD = DE = EC$. Крім того, оскільки $\triangle ABC$ гострокутний, то точка O лежить всередині цього трикутника.

Розглянемо $\triangle OMD$. У нього $OM \perp DM$, оскільки OM – серединний перпендикуляр до BC. З умови отримуємо $DM = ME = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}OD$, таким чином у прямокутному трикутнику OMD катет вдвічі менший за гіпотенузу, тому $\angle ODM = 60°$ (рис.3). Трикутник ODE – рівнобедрений, оскільки $OD = DE$. Тоді він правильний, тобто усі його кути дорівнюють $60°$ та $OD = OE = DE$. Трикутники BDO та OEC – рівнобедрені, тому можна обчислити $\angle OBD = \angle BOD = \angle COE = \angle OCE = 30°$. Тоді $\angle DOC = 180° - \angle ODC - \angle DCO = 90°$. Таким чином $\triangle AOC$ – прямокутний та рівнобедрений, тому $\angle OAC = \angle OCA = 45°$. Далі знаходимо $\angle AOB = 180° - \angle BOD = 150°$. І остаточно, з рівнобедреного трикутника AOB маємо $\angle OAB = \angle OBA = 15°$. Звідси вже знаходимо шукані кути трикутника, які наведені у відповіді.

5. (Рубльов Богдан) Кожен з хлопців – Віталій, Михайло та Олександр отримали від мами по n гривень. Віталій на усю суму повинен був купити книжки, Михайло – зошити, а Олександр – ручки. На решту, що залишилась у них, мама дозволила купити морозиво. Мамі вони сказали, що Віталікові цих грошей вистачило лише на купівлю 1 книги, Михайлові – на купівлю двох зошитів, Олександрові – на купівлю п'яти ручок, і морозива хлопці купили на n гривень. Доведіть, що принаймні один з хлопців неправильно виконав доручення мами.

Розв'язання. Позначимо вартість однієї книги, зошита та ручки відповідно через q_1, q_2 та q_3, а одержані решти – r_1, r_2, r_3. Тоді умови задачі можна записати таким чином:

$$n = q_1 + r_1, n = 2q_2 + r_2, n = 5q_3 + r_3,$$

при цьому повинні виконуватись умови $r_1 < q_1, r_2 < q_2, r_3 < q_3$, бо інакше були б куплені додатково або книга, або зошит, або ручка. З останніх нерівностей випливає, що $n = q_1 + r_1 > 2r_1, n = 2q_2 + r_2 > 3r_2, n = 5q_3 + r_3 > 6r_3 \Rightarrow r_1 < \frac{1}{2}n, r_2 < \frac{1}{3}n, r_3 < \frac{1}{6}n$. Якщо додати записані рівності, то одержимо, що

$$n = r_1 + r_2 + r_3 < \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} = n.$$

Одержана суперечність доводить, що при купівлі була помилка.

6. (4 задача у достатньому рівні) У гострокутному трикутнику ABC точки M і N – середини сторін AB і AC відповідно. Для довільної точки S, що лежить на стороні BC, доведіть, що виконується умова:

$$(MB - MS)(NC - NS) \leq 0.$$

Розв'язання. Проведемо висоту AD, тоді з властивостей прямокутних трикутників $MB = MD, NC = ND$ (рис.4). Якщо $S = B$, або $S = C$, або $S = D$, то $MB = MS$ або $NC = NS$, звідки заданий вираз в лівій частині умови дорівнює нулеві і твердження доведене.

Нехай тепер S не співпадає із жодною з точок B, C, D, тоді без обмеження загальності розгляду, припустимо, що S належить відрізку BD. Тоді $MB = MD > MS$ та $NS > ND = NC$, звідки й маємо, що $(MB - MS)(NC - NS) < 0$, що й треба було довести.

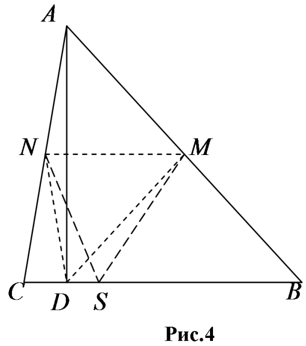


Рис.4

7. (5 задача у середньому та достатньому рівні) Чи існують такі попарно різні натуральні числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, більші від 1, для яких виконується рівність

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 2010 \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} \right)$$

а) якщо $k = 2$;

б) якщо $k = 12$.

Відповідь: ***а)*** будь яка пара дільників числа 2010, добуток яких дорівнює 2010, наприклад $a_1 = 2, a_2 = 1005$;

б) $2, 3, 5, 6, 10, 15, 134, 201, 339, 402, 670, 1005$.

Розв'язання. В основі знаходження таких чисел добре відоме співвідношення: якщо d – деякий дільник числа n, $1 < d < n$, то число $d' = \frac{n}{d}$ так само є дільником числа n, що задовольняє умови $1 < d' < n$. При цьому, якщо n не повний квадрат, то $d \neq d'$.

а) Таким чином двома числами, що задовольняють умову можуть бути будь-яка пара дільників числа 2010. Умову достатньо переписати у вигляді

$$a_1 + a_2 = \frac{2010}{a_1} + \frac{2010}{a_2}.$$

б) Так само треба просто виписати попарно різні дільники числа 2010, звідки й одержимо шукану відповідь, Для кожної відповідної пари дільників виконується формула, що наведена у попередньому пункті, звідки й випливає наведена відповідь.

9 клас

1. Побудуйте графік рівняння: $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$.

Відповідь: відкриті промені $y = -1$ при $x < 0$ та $y = 1$ при $x > 0$ (рис.5).

Розв'язання. Зрозуміло, що $x \neq 0$ та $y \neq 0$, далі розглянемо 3 випадки.

1й випадок. $x > 0, y > 0$, тоді маємо умову $2y = 2$, звідки знаходимо перший промінь з відповіді.

2й випадок аналогічний першому при $x < 0, y < 0$, тоді маємо інший промінь з відповіді.

3й випадок. $xy < 0$, тоді маємо рівність $2y = 0$, яка не має розв'язків, що задовольняють умові.

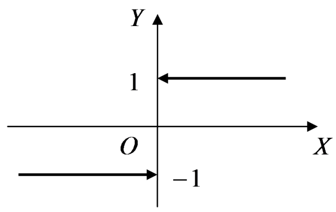


Рис.5

2. Прямокутник розміром 2010×11 розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітин товщиною у 1 клітину цього прямокутника пофарбовано у жовтий колір, шар клітин товщиною у 1 клітину, що межує із зовнішнім шаром, пофарбовано у блакитний колір. Наступний шар клітин, що межує з блакитним пофарбовано у жовтий колір і так далі. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітин у цьому прямокутнику.

Відповідь: жовтих 12066, блакитних 10044.

Розв'язання. Виділимо зовнішні шари кожного кольору послідовно:

2010×11 – жовтий; 2008×9 – блакитний; 2006×7 – жовтий; 2004×5 – блакитний; 2002×3 – жовтий; 2000×1 – блакитний.

Далі просто через різницю відповідних площ зовнішніх прямокутників та внутрішніх обчислимо відповідні значення. Почнемо знизу.

Блакитних: $2000 \cdot 1 = 2000$. Жовтих: $2002 \cdot 3 - 2000 \cdot 1 = 4006$.

Блакитних: $2004 \cdot 5 - 2002 \cdot 3 = 4014$ Жовтих: $2006 \cdot 7 - 2004 \cdot 5 = 4022$.

Блакитних: $2008 \cdot 9 - 2006 \cdot 7 = 4030$. Жовтих: $2010 \cdot 11 - 2008 \cdot 9 = 4038$.

Разом маємо: жовтих $4038 + 4022 + 4006 = 12066$, блакитних $4030 + 4014 + 200 = 10044$.

3. При яких x значення функції $y = \left(\sqrt{x}\right)^{2009} + \left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}$ є цілим числом?

Відповідь: при $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що ОДЗ нашого виразу $x \in [0, 1]$, тому кожний з доданків невід'ємний та не перевищує 1. Це означає, що при піднесенні до степеня він не збільшується. Тому $(\sqrt{x})^{2009} + \left(\sqrt{1-x}\right)^{2010} \le x + (1-x) = 1$, тобто цей вираз може приймати цілі значення лише 0 та 1. Те, що нуль не приймається – очевидно, оскільки кожний з доданків невід'ємний та одночасно доданки не обертаються в нуль. Значення 1 може досягатись за одночасного виконання двох умов: $(\sqrt{x})^{2009} = x$ та $\left(\sqrt{1-x}\right)^{2010} = (1-x)$, тому можливі значення $x = 0$ та $x = 1$. Перевіркою переконуємось, що вони обидва задовольняють умову і є шуканими розв'язками задачі.

4. У гострокутному трикутнику ABC точка O – центр описаного кола, CH – висота трикутника, точка T – основа перпендикуляра, що опущений з вершини C на пряму AO. Доведіть, що пряма TH проходить через середину сторони BC.

Розв'язання. Позначимо через P перетин прямих TH та BC (рис.6). Треба показати, що P середина сторони BC. Оскільки $\angle AHC = \angle ATC = 90°$, то чотирикутник $ACTH$ – вписаний, тому $\angle PHC = \angle TAC = \angle OAC = \frac{1}{2}(180° - \angle AOC) = 90° - \angle ABC = \angle BCH = \angle PCH \Rightarrow \triangle PCH$ – рівнобедрений з вершиною P. Оскільки $\triangle CHB$ – прямокутний, то P лежить на серединному перпендикулярі до відрізку CH, тому P середина сторони BC.

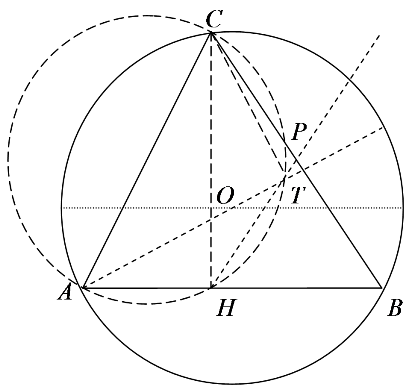


Рис.6

5. (Голоднов Кирило) Натуральні числа a, b, c, d такі, що $ab^2 + ad^2 + cb^2 = ba^2 + bd^2 + ca^2$ та число $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ – просте. Доведіть, що $a = b$.

Розв'язання. Припустимо, що $a \ne b$. Умову $ab^2+ad^2+cb^2 = ba^2+bd^2+ca^2$ можна переписати в вигляді: $(a-b)(d^2 - ab - ac - bc) = 0$. Тому в припущенні $a \ne b$ одержимо: $d^2 = ab + ac + bc$. Тоді: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = (a+b+c)^2 - d^2 = (a+b+c+d)(a+b+c-d)$. Оскільки $(a+b+c+d)(a+b+c-d)$ – просте, та a, b, c, d – натуральні, то $a+b+c-d = 1$. Тобто $ab + ac + bc = d^2 = (a+b+c-1)^2$. Розкриваючи дужки у рівності $(a+b+c-1)^2 = ab+ac+bc$, одержимо: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2ab + 2ac + 2bc - 2a - 2b - 2c = ab + ac + bc$, або

$$a(a+b-2) + b(b+c-2) + c(c+a-2) + 1 = 0.$$

Але ця рівність не може виконуватись, оскільки кожний доданок у лівій частині невід'ємний, і уся сума не менше 1. Тому $a = b$.

6. (4 задача у достатньому рівні) У гострокутному трикутнику ABC точка O є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (центр описаного кола), D – точка перетину прямих AO та BC. Виявилось, що $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Знайти кути трикутника.

Відповідь: Кути трикутника $\angle ABC = 45°, \angle BAC = 60°, \angle ACB = 75°$.

Розв'язання. Дивись задачу 4 високого рівня 8 клас

7. (5 задача у середньому та достатньому рівні) Число $n > 2010$ задовольняє умову: для будь-якого $k \in \{1, 2, \ldots, n-2010\}$ числа $n+k$ та $2010+k$ є взаємно простими. Знайдіть усі такі числа n.

Відповідь: 2011

Розв'язання. Позначимо число $m = n - 2010$, тоді маємо для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ таку рівність $(2010+k, n+k) = (2010+k, n+k-2010-k) = (2010+k, m) = 1$. Тобто, m послідовних чисел $2011, 2012, \ldots, 2010+k$ є взаємно простими з числом m, Але серед m послідовних чисел завжди принаймні одне ділиться на m, що суперечить наведений вище умові, окрім випадку $m = 1$. Таким чином шукане число $n = 2010 + m = 2011$.

10 клас

1. Розглянемо чотирицифрове число, а також чотирицифрове число, що записане такими самими цифрами у зворотному порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму десятковому запису модуль різниці таких чисел?

Відповідь: Максимум три цифри 5, що дає різниця, наприклад, таких чисел: $6621-1266=5355$.

Розв'язання. У відповіді показаний приклад, коли цифр 5 рівно три, покажемо, що більше бути не може. Очевидно, що отриманий модуль різниці має не більше чотирьох цифр. Розглянемо різницю двох таких чисел $\overline{abcd}-\overline{dcba}=1000a+100b+10c+d-1000d-100c-10b-a=999(a-d)+90(b-c)$, як бачимо вона кратна 9, а якщо число складається з усіх цифр 5, то воно 9 не кратне. Одержана суперечність доводить, що три цифри 5 є найбільшим можливим числом.

2. Розв'яжіть рівняння:

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0.$$

Відповідь: $x=0$.

Розв'язання. Помножимо ліву частину рівності на $2=((x+1)-(x-1))$, тоді з тотожності $a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$ маємо, що наше рівняння набуває вигляду: $(x+1)^6-(x-1)^6=0$ або $(x+1)^2=(x-1)^2$, звідки знаходимо єдиний розв'язок $x=0$.

3. Всередині квадрата $ABCD$ вибрано точку O. Квадрат $A'B'C'D'$ – образ квадрата $ABCD$ при гомотетії з центром у точці O та коефіцієнтом $k>1$ (точки A',B',C',D' є образами точок A,B,C,D відповідно). Доведіть, що сума площ чотирикутників $A'ABB'$ та $C'CDD'$ дорівнює сумі площ чотирикутників $B'BCC'$ та $D'DAA'$.

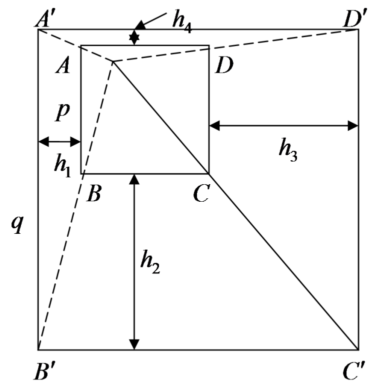


Рис.7

Розв'язання. Позначимо $p=AB$, $q=A'B'$ (рис.7). Тоді $q=kp$. Позначимо як на рисунку висоти трапецій h_1,h_2,h_3 та h_4. Тоді $S_{A'ABB'}+S_{C'CDD'}=\frac{p+q}{2}h_1+\frac{p+q}{2}h_3$, аналогічно $S_{B'BCC'}+S_{D'DAA'}=\frac{p+q}{2}h_2+\frac{p+q}{2}h_4$, тобто для доведення потрібного твердження достатньо довести, що $h_1+h_3=h_2+h_4$, але це очевидно, оскільки кожна з двох цих сум є $q-p$.

4. (Жидков Сергій) Невід'ємні числа a,b,c задовольняють умову $a+b+c=1$. Доведіть нерівність

$$(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2\ge 6\sqrt{abc}.$$

Чи може при вказаних умовах досягатись рівність?

Розв'язання. Відкриємо дужки у лівій частині нерівності:

$(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=3+a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 6\sqrt[6]{a^2b^2c^2abc}=6\sqrt{abc}$, рівність досягається лише при $a=b=c=a^2=b^2=c^2$, що неможливо при $a+b+c=1$.

Інше розв'язання. З очевидної нерівності $\left(\sqrt{a(a+b+c)}-\sqrt{bc}\right)^2\ge 0$ випливає, що

$$a(a+b+c)+bc\ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}\Leftrightarrow (a+b)(a+c)\ge 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

з трьох аналогічних нерівностей, якщо їх усі додати будемо мати:

$$(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)+(c+b)(c+a)\ge 6\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

З нерівності трьох квадратів

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\ge (a+b)(a+c)+(b+a)(b+c)+(c+a)(c+b),$$

з урахуванням умов задачі та двох останніх нерівностей будемо мати:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\ge 6\sqrt{abc(a+b+c)}\Leftrightarrow$$

$$(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2\ge 6\sqrt{abc}.$$

Доведення того, що рівність досягатись не може проводиться зовсім просто.

5. У кожній клітині дошки $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}$, у шаховому порядку розставлені букви A та Б. Можна послідовно міняти букви у клітинах за такими правилами: вибираються дві клітини, які мають спільну сторону і букви у кожній з них замінюються таким чином: якщо у клітині записана буква A, то замість неї записують букву Б, якщо у клітині записана буква Б, то замість неї записують буква В, і нарешті, якщо у клітині записана буква В, то замість неї записують букву А. При яких m і n можна за скінченну кількість кроків одержати дошку, яка заповнена буквами у протилежному до початкового порядку (тобто у клітинах, де була записана А, буде записано Б, і навпаки).

Відповідь: $mn \vdots 3$.

Розв'язання. Нехай m, n такі, що задовольняють умову задачі. Позначимо через a та b кількість клітин, у яких спочатку була написана буква A та Б відповідно. Тоді $a+b = mn$. Якщо у комірці i була записана буква A, то треба зробити $3s_i + 1$ кроків, щоб там з'явилась буква Б, аналогічно у комірці j, де була записана буква Б, треба зробити $3t_j + 2$ кроків. Оскільки кожна дія із зміною букв торкається одночасно двох комірок, у яких були записані різні букви, то $\sum\limits_{i=1}^{a}(3s_i+1) = \sum\limits_{j=1}^{b}(3t_j+2) \Rightarrow a - 2b = 3\sum\limits_{i=1}^{a} s_i - 3\sum\limits_{j=1}^{b} t_j \Rightarrow 3 \,|\, (a-2b)$ або $3 \,|\, (a+b)$, тобто принаймні одне з чисел m, n повинно бути кратним 3. З іншого боку, якщо одне з цих чисел кратне 3, то дошку можна розрізати на шматочки 1×3, для яких перетворення потрібним чином зробити досить легко: АБА $\to$ БВА $\to$ БАБ; БАБ $\to$ ВББ $\to$ АВБ $\to$ ААВ $\to$ АБА, таким чином ця умова і є шуканою.

6. (4 задача у достатньому рівні) Дійсні числа x, y, z задовольняють умову:

$$\frac{1}{xy} = \frac{y}{z-x+1} = \frac{2}{z+1}.$$

Доведіть, що одне з цих чисел є середнім арифметичним двох інших.

Розв'язання. З цих умов визначимо, що $z = xy^2 + x - 1 = 2xy - 1 \Rightarrow x(y^2 - 2y + 1) = x(y-1)^2 = 0$ звідки випливає, що $y = 1$, оскільки з умов задачі зрозуміло, що $x \neq 0$. Але тоді з рівності $xy = \frac{z+1}{2}$ випливає, що $x = \frac{z+y}{2}$, що й треба було довести.

7. (5 задача у середньому та достатньому рівні) Вчителька розсадила за круглим столом своїх учнів, серед яких було втричі менше хлопчиків ніж дівчаток. Виявилось, що серед усіх пар учнів, які сидять поруч, пар дітей одної статі у два рази більше, ніж пар дітей різної статі. При якій мінімальній кількості дітей за столом таке могло трапитись?

Відповідь: 12 дітей.

Розв'язання. Нехай хлопців x, тоді дівчат – $3x$ і усіх дітей $4x$. Тоді усього пар дітей різного полу буде y, тоді загалом усіх пар буде – $3y$. Зауважимо, що кількість пар дітей дорівнює кількості дітей, тобто $3y = 4x$, найменшим x, яке задовольняє таке рівняння – це $x = 3$, таким чином дітей щонайменше повинно бути 12. Залишається показати, що при такій кількості дітей можливо їх розсадити з виконанням умов.

Приклад такий – 3 хлопці сидять так: двоє поруч, а ще один не поруч. Тоді пар дітей різного полу усього 4, по дві від кожної групи хлопців, решта пар – діти одного полу, яких 8, що й доводить, що наведена відповідь є правильною.

11 клас

1. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких виконується рівність:

$$-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \ldots + (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{2010}?$$

Відповідь: $n = 4021$.

Розв'язання. Скористаємось формулою геометричної прогресії, оскільки зліва та справа саме такі вирази. $-2^0+2^1-2^2+2^3-2^4+\ldots+(-2)^n = \frac{-1\cdot((-2)^{n+1}-1)}{-2-1} = \frac{1\cdot(4^{2011}-1)}{4-1}$. Або $(-2)^{n+1} = 4^{2011}$. Звідси зрозуміло, що n повинно бути непарним. Нехай $n = 2m+1 \Rightarrow (-2)^{2m+2} = 4^{2011} \Rightarrow 4^{m+1} = 4^{2011}$ звідки остаточно знаходимо, що $m = 2010$ і $n = 4021$.

2. У кубі розміром $11 \times 11 \times 11$ зовнішній шар одиничних кубиків пофарбовано у жовтий колір, наступний шар, що дотикається до цього зовнішнього жовтого фарбується у блакитний, наступний шар – знову у жовтий і так далі. Знайти загальну кількість жовтих та блакитних одиничних кубиків.

Відповідь: блакитних – $1+98+386 = 485$ кубиків, жовтих – $602+218+26 = 846$.

Розв'язання. Легко збагнути, що усього буде 6 шарів, достатньо розглянути серединний переріз куба, що проходить через центр великого кубика та паралельно одній з граней. Тоді зовнішній жовтий шар має ширину 11, наступний блакитний – 9, наступний жовтий має ширину 7, наступний блакитний – 5, далі жовтий шар шириною 3 і останній (шостий шар) блакитний має ширину 1, звідки очевидно, що цей шар складається з одного центрального одиничного кубика. А далі просто будемо проводити обчислення, починаючи з середини.

5-й шар, жовтий, шириною 3, має $3^3 - 1^3 = 26$ кубиків.

4-й шар, блакитний, шириною 5, містить $5^3 - 3^3 = 98$ кубиків.

3-й шар, жовтий, шириною 7, містить $7^3 - 5^3 = 218$ кубиків.

2-й шар, блакитний, шириною 9, містить $9^3 - 7^3 = 386$ кубиків.

Нарешті, зовнішній шар, жовтий, шириною 11, містить $11^3 - 9^3 = 602$ кубики.

Остаточно, блакитних – $1+98+386 = 485$ кубиків, а жовтих $602+218+26 = 846$ кубиків.

3. (Рожкова Марія) Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло та має перпендикулярні діагоналі. Точки K, L, M, Q – точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Довести, що чотирикутник $KLMQ$ рівний чотирикутнику $ABCD$.

Розв'язання. Позначимо через O – точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. На прямій AC розташовані висоти $\triangle BCD$ та $\triangle ACD$, тому ортоцентри K та M лежать на цій прямій. Аналогічно на прямій BD лежать ортоцентри L, Q (рис.8).

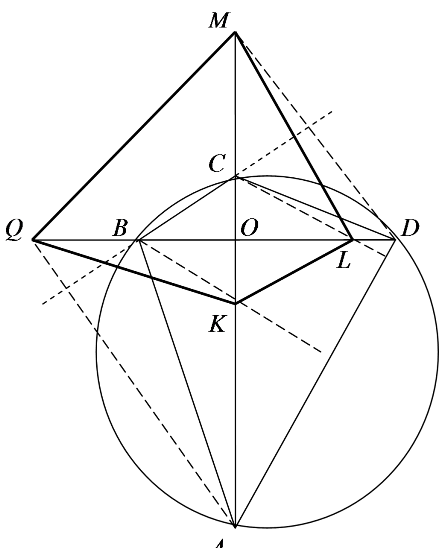


Рис.8

$BK \parallel CL$, оскільки обидва цих відрізки перпендикулярні прямій AD. Тоді можемо записати такі рівності кутів:

$$\angle BKC = \angle KCL = \angle ACL = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ \angle DBC = 90^\circ - \angle$$

Таким чином $\triangle BCK$ – рівнобедрений, тому точки C і K симетричні відносно прямої BL, звідси випливає, що $\triangle BCK$ – також рівнобедрений. Таким чином рівні кути $\angle BKC = \angle BCK = \angle KCL = \angle CKL$, тому чотирикутник $BCKL$ – ромб. Аналогічно доводиться, що й чотирикутник $ADMQ$ також ромб. Звідси вже просто одержуємо, що чотирикутник $KLMQ$ є центрально симетричним образом чотирикутника $ABCD$ відносно точки O, звідки й випливає, що вони рівні.

4. Довести, що для кожного натурального n рівняння $a^n + 2010b^n = c^{n+1}$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах a, b, c.

Розв'язання. Покладемо для довільного натурального k числа $a = b = 2011k^{n+1}$, тоді $a^n + 2010b^n = 2011^n k^{n(n+1)} + 2010 \cdot 2011^n k^{n(n+1)} = 2011^n k^{n(n+1)} \cdot 2011 = 2011^{n+1} k^{n(n+1)} = (2011k^n)^{n+1} = c^{n+1} \Rightarrow c = 2011k^n$.

5. (Голоднов Кирило) Числа x, y, z задовольняють умову $x \in (0,1]$, $y \in (0,1]$, $z \in (0,1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{2+xy+yz} + \frac{y}{2+yz+zx} + \frac{z}{2+zx+xy} \le \frac{x+y+z}{x+y+z+xyz}.$$

Розв'язання. Розглянемо очевидну нерівність: $0 \le (1-x)(1-y)(1-z) = 1 + xy + yz + zx - x - y - z - xyz \Rightarrow 1 + xy + yz + zx \ge x + y + z + xyz \Rightarrow 2 + xy + yz \ge x + y + z + xyz \Rightarrow$

$$\frac{x}{2+xy+yz} \le \frac{x}{x+y+z+xyz}.$$

Запишемо дві аналогічні нерівності і будемо мати:

$$\frac{y}{2+yz+zx} \le \frac{x}{x+y+z+xyz}.$$

$$\frac{z}{2+zx+xy} \le \frac{x}{x+y+z+xyz}.$$

Якщо додати одержані нерівності будемо мати потрібну нерівність.

6. (4 задача у достатньому рівні) Натуральні числа m, n такі, що число $(2^n + 3^m)$ ділиться на 5. Доведіть, що число $(2^m + 3^n)$ також ділиться на 5.

Розв'язання. Останні цифри чисел 2^n та 3^m повторюються з періодом 4. Для першого це послідовність 2, 4, 8, 6, для другого – відповідно 3, 9, 7, 1. Для того, щоб число $(2^n + 3^m)$ ділилося на 5, потрібно, щоб були такі пари останніх цифр: $2+3, 4+1, 8+7, 6+9$, але тоді відповідні суми останніх цифр числа $(2^m + 3^n)$ дають: $2+3, 6+9, 8+7, 4+1$, тобто це число так само буде кратним 5, що й треба було довести.

7. (5 задача у середньому та достатньому рівні) Знайдіть невід'ємні розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 1 = x^2 + xy, \\ y^2z^2 + 1 = y^2 + yz, \\ z^2x^2 + 1 = z^2 + zx. \end{cases}$$

Відповідь: $x = y = z = 1$.

Розв'язання. Якщо принаймні одна із змінних дорівнює нулеві, наприклад, $x = 0$, то з першого рівняння маємо суперечність $1 = 0$.

Тепер будемо вважати, що усі змінні ненульові. Тоді з першого рівняння маємо: $x^2y^2+1 \ge 2xy \Rightarrow x^2 \ge xy$ або $x \ge y$, з інших рівнянь аналогічно одержимо, що $x \ge y \ge z \ge x$, звідки випливає, що усі змінні рівні. Далі просто з першого рівняння одержимо, що $x^4+1 = 2x^2 \Rightarrow x = y = z = 1$.