Графи

1. На плоскост выбрано конечное множество точек с целыми координатами. Докажите, что можно покрасить эти точки в синий и желтый цвета так, чтобы на каждой горизонтальной или вертикальной прямой количество синих и количество желтых клеток отличались не более чем на 1.

2. Вершины графа G можно единственным образом разбить на 5 групп так, что никакие две вершины из одной группы не смежны. Обозначим через n число вершин графа G. Докажите, что в этом графе не менее, чем 4n–10 ребер.

3. После кругового теннисного турнира на n человек в редакции оказалась полная таблица турнира, но без имён игроков, и — отдельно — полный список игроков. Журналист хочет передать в редакцию результаты нескольких игр так, чтобы по ним было возможно восстановить, кто выиграл в каждой паре. Докажите, что ему для этого хватит $n\log_2 n$ матчей.

4. Степени всех вершин графа нечетны. Докажите, что через любое его ребро проходит четное число гамильтоновых циклов.

5. В двудольном графе $2^n - 1$ вершин, в каждой написано n различных чисел. Докажите, что можно оставить в каждой вершине ровно одно число так, чтобы в смежных вершинах стояли различные числа.

6. Докажите, что в полном ориентированном графе на 799 вершинах можно выбрать две группы по 7 вершин в каждой так, чтобы все ребра между группами были направлены от первой ко второй.

7. В графе 100 вершин и более 2500 ребер, причем в нем есть простой цикл (то есть цикл без повторяющихся вершин), проходящий по всем вершинам. Докажите, что для любого k = 3, 4, ..., 99 в этом графе найдётся простой цикл, проходящий по k вершинам.

8. В графе 3n вершин, они разбиваются на три полных подграфа по n вершин. При этом не существует полного подграфа на n+1 вершине. Докажите, что вершины графа можно правильно покрасить в [5n/3] цветов.

9. Деякі учасники математичного змагання товаришують один з одним, причому якщо *A* товаришує з *B,* то й *B* товаришує з *A.* Назвемо групу учасників клікою, якщо кожні двоє з неї товаришують. (Зокрема одна людина утворює кліку). Назвемо розміром кліки кількість людей у ній. Відомо, що найбільший розмір кліки, що складається з учасників змагання, є парним числом. Доведіть,

що можливо розсадити усіх учасників у дві кімнати таким чином, щоб найбільші розміри клік у кімнатах були рівними.

10. Теорема Менгера.

Нехай А та В – різні вершини графа $G.$ Відомо, що які б n вершин не викинули з G в ньому все одно знайдеться шлях, що сполучає А та В. Доведіть, що тоді у G є принаймні n+1 неперетинних шляхів з А до В.

11. Теорема Ділуорта

Розглянемо орієнтований граф G, який має наступну властивість: якщо з А виходить ребро в В, а із В виходить ребро в С, то із А виходить ребро в С (дві вершини можуть сполучатися не більше ніж одним орієнтованим ребром). Повні підграфи G називатимемо ланцюгами, а підграфи G, що не містять ребер назвемо антиланцюгами. Доведіть, що розмір найбільшого антиланцюга рівний найменшій кількості ланцюгів, на які розбивається $G,$ і обернене твердження.