Відбір міста Києва на Всеукраїнську олімпіаду 2010-2011 рр

II тур

Умови та розв'язки по усіх класах

8 клас

1. Дійсні числа a, b, c задовольняють умову:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=1.$$

Чому дорівнює значення виразу

$$\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|+\left|\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right|+\left|\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}\right|?$$

Відповідь: 3.

Розв'язання. Перенесемо усі доданки заданої рівності (очевидно, що $abc \neq 0$), зведемо до спільного знаменника і чисельник буде задовольняти умову:

$$a^2c+b^2c-c^3+a^2b+c^2b-b^3+c^2a+b^2a-a^3-2abc=0. \quad (1)$$

Розглянемо вираз:

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a), \qquad (2),$$

якщо розкрити усі дужки та звести подібні, то ми одержимо ліву частину рівності (1). Таким чином з умов задачі випливає, що один з множників виразу (2) повинен дорівнювати 0. Без обмеження загальності розгляду будемо вважати, що $c=a+b$. Тоді перший доданок у виразі, який необхідно знайти, дорівнює -1, а два інші – $+1$. Таким чином, по модулю кожний з доданків дорівнює 1, і звідси маємл наведену відповідь.

2. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB > BC$ серединний перпендикуляр до діагоналі AC перетинає сторону DC у точці E. Коло з центром у точці E та радіусом AE перетинає відрізок AB вдруге у точці F. Точка G – основа перпендикуляра, що опущений з точки C на відрізок EF. Доведіть, що точка G лежить на діагоналі BD.

Розв'язання. Позначимо $\angle FAE = \angle EFA = \angle AED = \angle FEC = \alpha$. За побудовою $AE = EC$, тому побудоване коло з центром у точці E та радіусом AE проходить через точки A, F, C (Рис.1). Але тоді прямокутні трикутники ADE та ECG рівні за рівними гіпотенузами та кутами, тому $ED = EG$, $CG = AD = BC$. Таким чином триктуник DEG – рівнобедрений, тому $\angle EGD = \frac{\pi - \angle DEG}{2} = \frac{\angle GEC}{2} = \frac{\alpha}{2}$.
Так само рівні прямокутні трикутники CFB та CFG за рівною гіпотенузою та катетом. Тобто трикутник GFB також рівнобедрений, звідки $\angle FGB = \frac{\alpha}{2}$.
Таким чином $\angle FGB = \angle EGD$, звідки випливає, що точки B, G, D лежать на одній прямій.

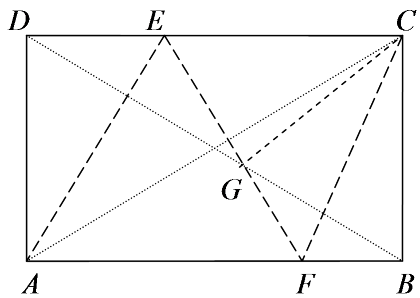

Рис. 1

3. Чи існують числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$, значення кожного з яких дорівнюють ± 1, для яких виконується рівність:

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{2008}x_{2009}+x_{2009}x_1=999?$$

Відповідь: Не існують.

Розв'язання. Припустимо, що такі числа існують, тоді нехай серед добутків $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{2008}x_{2009}, x_{2009}x_1$ рівно a дорівнюють $+1$ та рівно b дорівнюють -1. Тоді числа a, b задовольняють умови: $a+b=2009$ та $a-b=999$. Звідси $a=1504, b=505$. Оскільки

$$1=(x_1x_2x_3\dots x_{2009})^2=(x_1x_2)(x_2x_3)\dots(x_{2008}x_{2009})(x_{2009}x_1)=1^{1504}(-1)^{505}=-1.$$

Одержана суперечність завершує доведення.

4. Розглянемо усі натуральні пятицифрові числа, які не діляться на 10. Назвемо таке число паліндромічним добутком, якщо воно задовольняє такі дві умови:

1) саме число є паліндромом, тобто його природний запис та число, що записане тими самими цифрами у зворотному порядку, збігаються;

2) це число є добутком двох натуральних множників, таких, що якщо цифри першого множника записати у зворотному порядку, то вийде число, яке дорівнює другому множнику.

Наприклад, $20502=102\cdot 201$ є паліндромічним добутком. Знайдіть усі п'ятицифрові паліндромічні добутки.

Відповідь: 10201, 12321, 14641, 20502, 23632, 26962, 40804 та 44944.

Розв'язання. Множники з другої умови мають однакову кількість цифр, оскільки жодне з них не закінчується нулем. Вони не можуть мати по 4 та по 2 цифри, таким чином можемо шукані двоцифрові числа позначити $\overline{abc}$ та $\overline{cba}$. Розглянемо добуток

$$\overline{abc}\cdot\overline{cba}=10000ac+1000b(a+c)+100(a^2+b^2+c^2)+10b(a+c)+ac.$$

Маємо такі умови, яким повинні задовольняти цифри a, b, c.

$ac\le 9$.

$b(a+c)\le 9$, бо інакше перша цифра більша за ac, і тому відмінна від останньої цифри.

$a^2+b^2+c^2\le 9$ з аналогічних міркувань.

Далі бачимо такі можливі значення для цифр: $b^2=9-a^2-c^2\le 7$, тому $0\le b\le 2$. Аналогічно $1\le a, c\le 2$, звідки залишається перебрати лише такі числа: 101, 102, 111, 112, 121, 122, 202, 212. Звідси й маємо шукані 8 відповідей: 10201, 12321, 14641, 20502, 23632, 26962, 40804 та 44944.

9 клас

1. Задача 8-1.

2. Задача 8-2.

3. Знайти всі натуральні n, для яких ми можемо пофарбувати всі сторони та діагоналі опуклого n-кутника в один із заданих n кольорів (відрізок фарбується повністю в один колір) таким чином, що справджується така умова: для кожних трьох кольорів існує трикутник з вершинами серед вершин багатокутника, сторони якого пофарбовані в ці кольори.

Відповідь: $n>1$ та непарне.

Розв'язання. Усього ми маємо можливість вибрати C_n^3 варіантів трьох кольорів, а також вершин серед трьох. Тобто, для виконання умови задачі треба, щоб усі трикутники були пофарбовані різним чином, тобто між цими трійками повинна існувати бієкція. Звідси випливає, що жодні два відрізки одного кольору не мають спільної вершини. Для кожного кольору існує рівно C_{n-1}^2 трикутників, одна сторона якого має цей колір. Звідси існує рівно $\frac{n-1}{2}$ ліній одного кольору. Таким чином n – непарне.

Побудуємо приклад розфарбування для непарного n. Без обмеження загальності можемо вважати, що багатокутник правильний. Спочатку пофарбуємо усі його сторони у n різних кольорів. Далі фарбуємо усі діагоналі цього багатокутника відповідно до кольору тієї сторони, якій ця діагональ паралельна (на рис. приклад для $n=7$).

Покажемо, що немає двох трикутників, розфарбованих однаково. Якщо припустити, що існує два трикутники з однаковим розфарбуванням сторін. Тоді у цих трикутників паралельні сторони, але вони вписані в одне коло, тому вони повинні бути рівними, але це суперечить розфарбуванню, бо кожного кольору усі відрізки різної довжини. Це й завершує доведення.

4. Натуральні числа x, y задовольняють умову $3x^2+x = 4y^2+y$. Доведіть, що вираз $x-y$ є квадратом цілого числа.

Розв'язання. Перепишемо задану рівність у такому вигляді: $(x-y)(3x+3y+1) = y^2$. Припустимо, що $x-y$ не точний квадрат, тому є просте число p, яке ділить $x-y$ у непарному степені. Оскільки у правій частині стоїть y^2 – точний квадрат цілого числа, то p ділить праву частину у парному додатному степені, звідси p повинно ділити й $3x+3y+1$ і також в непарному степені. Але тоді маємо, що $y \vdots p$ та $x-y \vdots p \Rightarrow x \vdots p \Rightarrow 3x+3y+1$ не може ділитись на p – одержана суперечність завершує доведення.

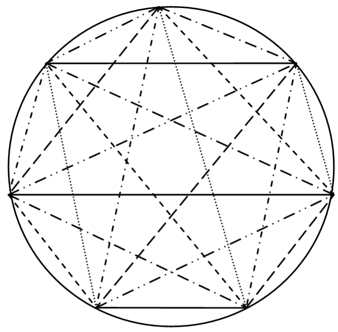

Рис.

10 клас

1. Знайти хоча б один многочлен $f(x) \not\equiv 0$ із найменшим можливим степенем такий, що в парі з деяким іншим многочленом $g(x) \not\equiv 0$ задовольняє для всіх x співвідношення: $f(x^3)+g(x) = f(x)+x^5g(x)$.

Відповідь: $f(x) = ax^4+ax^3+ax^2+ax+b$, $a \neq 0$.

Розв'язання. Очевидно, що стала функція f не може бути розв'язком задачі.

Будемо шукати такий поліном $f(x)$ степеня не більше 4. Перепишемо рівняння у вигляді $f(x^3)-f(x) = (x^5-1)g(x)$. Тобто $(f(x^3)-f(x)) \vdots (x^5-1)$. Подамо шуканий поліном у вигляді $f(x) = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, тоді

$$f(x^3)-f(x) = a_4(x^{12}-x^4)+a_3(x^9-x^3)+a_2(x^6-x^2)+a_1(x^3-x).$$

Якщо поділити $(x^{12}-x^4)$, (x^9-x^3), (x^6-x^2) на (x^5-1) ми одержимо остачі (x^2-x^4), (x^4-x^3), $(x-x^2)$ відповідно. таким чином при діленні $(f(x^3)-f(x))$ на (x^5-1) ми одержимо остачу $(-a_4+a_3)x^4+(-a_3+a_1)x^3+(a_4-a_2)x^2+(a_2-a_1)x$. Оскільки повинна бути подільність, то останній многочлен повинен бути тотожнім нулем, тобто виконуються рівності:

$$-a_4+a_3 = -a_3+a_1 = a_4-a_2 = a_2-a_1 = 0.$$

Звідси маємо шукану відповідь. Якщо це підставити у вихідну рівність, то легко знайти вигляд полінома $g(x) = ax^7+ax^4+ax^2+ax$. З умови нерівності многочленів тотожнім нулям випливає умова $a \neq 0$ та b – довільне. З розв'язання зрозуміло, що це найменша можливий степінь полінома $f(x)$, бо інакше ми б знайшли розв'язок меншого степеня.

2. Бісектриси кутів A, B та C трикутника ABC перетинають описане навколо цього трикутника коло $S_1(O,R)$ у точках A_2, B_2, C_2 відповідно. Дотичні до кола S_1 у точках A_2, B_2, C_2 перетинаються між собою в точках A_3, B_3, C_3 (точки A і A_3 лежать по один бік від прямої BC, аналогічно для інших точок). Нехай вписане у трикутник ABC коло $S_2(I,r)$ дотикається до його сторін у точках A_1, B_1, C_1 відповідно (точка $A_1 \in BC$, аналогічно для інших точок). Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, AA_3, BB_3, CC_3 перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Добре відомо, що $IA \perp B_1C_1$, $IB \perp C_1A_1$, $IC \perp A_1B_1$, а точки A_2, B_2, C_2 є серединами відповідних дуг. Позначимо кути $\angle x = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle y = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle z = \frac{1}{2}\angle B$, тоді неважко побачити, що $IA \perp B_2C_2$, тому $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Аналогічно для інших пар відрізків. Таким чином трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ є гомотетичними. Таким чином відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в точці P, яка є центром гомотетії.

Точка O – центр описаного кола для $\triangle A_2B_2C_2$, точка I – інцентр $\triangle ABC$, а також центр описаного кола навколо $\triangle A_1B_1C_1$. Внаслідок одержаної гомотетичності ми маємо, що точки O та I відповідають одна іншій при цій гомотетії, тому точки O, P, I лежать на одному відрізку та точка P поділяє цей відрізок у відношенні $\lambda = \frac{R}{r}$. Більше того, маємо $\overrightarrow{PO} = \lambda \cdot \overrightarrow{PI}$.

Пряма A_3B_3 дотикається до кола S_1 у середині дуги $\smile AB$, крім того $A_3B_3 \parallel AB$, аналогічно для інших пар сторін трикутників $A_3B_3C_3$ та ABC. Для них так само має місце гомотетичність з центром гототетії, деякою точкою T.

Але легко побачити, що кола S_1 та S_2 є вписаними у ці гомотетичні трикутники. А тому і для точки T мають місце аналогічні співвідношення, що й для $\overrightarrow{TO} = \lambda \cdot \overrightarrow{TI}$, звідки й випливає, що $P = T$, і у цій точці перетинаються відразу усі вказані в умові прямі.

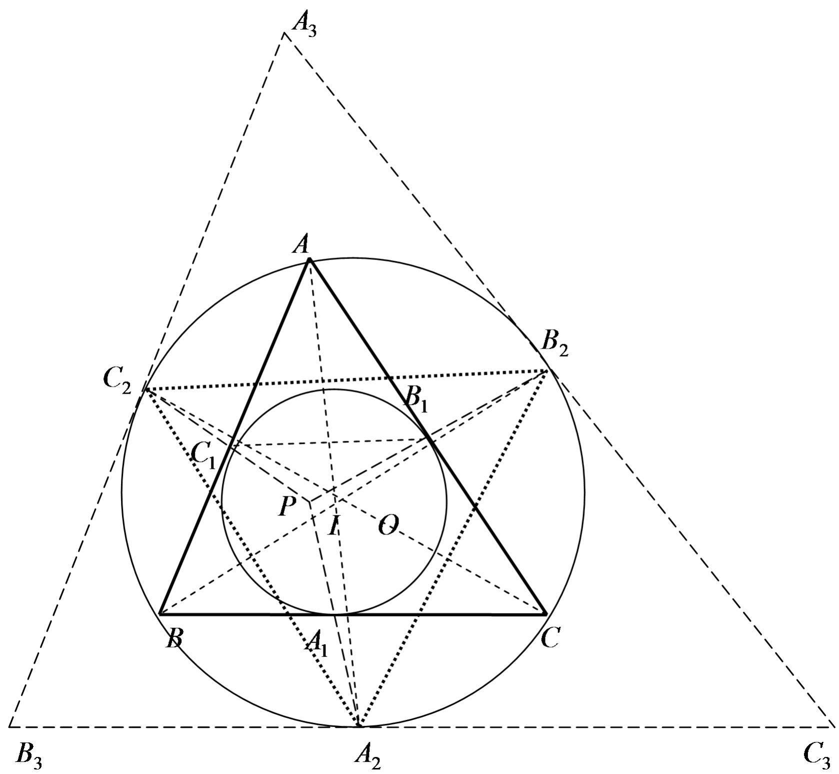

Рис.2

3. Задача 9-3.

4. Задача 9-4.

11 клас

1. Задача 10-1.

2. Задача 10-2.

3. Є ряд ламп, що пронумеровані числами $1, 2, \ldots, 2011$. Кожна лампа має свій індивідуальний перемикач, який натискуванням переводить відповідну лампу зі стану ВКЛ у стан ВИКЛ та навпаки. Але перемикачі можна натискати лише за такими правилами:

1) Перемикач №1 можна натискати у будь-який момент.

2) Перемикач із номером $k \in \{2, 3, \ldots, 2011\}$ можна натискати тільки за умови, що лампа із номером $k-1$ у стані ВКЛ, а лампи із номерами $1, 2, \ldots, k-2$ (якщо такі існують) у стані ВИКЛ.

На початку усі лампи у стані ВКЛ. Доведіть, що найменша кількість натискань на перемикачі, щоб перевести усі лампи у стан ВИКЛ, дорівнює $\frac{2^{2012}-1}{3}$.

Розв'язання. Через 1 позначимо стан ВКЛ, а через 0 – стан ВИКЛ.

Позначимо через b_k – найменшу кількість натискань, які дозволяють перевести перемикачі з стану $\underbrace{000\ldots00}_{\text{k}}$ у стан $\underbrace{000\ldots0}_{\text{k-1}}1$, в подальшому будемо це записувати таким чином: $\underbrace{000\ldots00}_{\text{k}} \to \underbrace{000\ldots0}_{\text{k-1}}1$, так само через c_k позначимо найменшу кількість натискань для переводу $\underbrace{000\ldots0}_{\text{k-1}}1 \to \underbrace{000\ldots00}_{\text{k}}$.

Тоді маємо таку рівність:

$$b_k = b_{k-1} + 1 + c_{k-1}, \qquad (1)$$

яка випливає з схеми:

$$\underbrace{00\ldots000}_{\text{k}} \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}10 \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}11 \to \underbrace{00\ldots00}_{\text{k-1}}1,$$

яку зрозуміти можна так: щоб перевести останню лампу у стан 1 треба мати розподіл перемикачів як показано після першої стрілки, далі йде натискання цього перемикача і виконання основної цілі, зрозуміло, для мінімальності зайвих натискань робити не слід.

Аналогічно зі схеми

$$\underbrace{00\ldots00}_{\text{k-1}}1 \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}11 \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}10 \to \underbrace{00\ldots00}_{\text{k}},$$

маємо рівність:

$$c_k = b_{k-1} + 1 + c_{k-1}. \qquad (2)$$

Неважко побачити, що $b_2 = c_2 = 3$: $00 \to 10 \to 11 \to 01$ та $01 \to 11 \to 10 \to 00$. З урахуванням цього, з рівностей (1) та (2) маємо, що $b_k = c_k$, $k \geq 2$.

Таким чином для $b_k(c_k)$ маємо рекурентне співвідношення: $b_k = 2b_{k-1} + 1$, $b_2 = 3$. Розв'язуємо його стандартними методами і маємо, що $b_k = c_k = 2^k - 1$.

Тепер через l_k позначимо найменшу кількість натискань для переводу $\underbrace{11\ldots11}_{\text{k}} \to \underbrace{00\ldots00}_{\text{k}}$.

Тоді зі схеми

$$\underbrace{11\ldots11}_{\text{k}} \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}11 \to \underbrace{00\ldots0}_{\text{k-2}}10 \to \underbrace{00\ldots00}_{\text{k}},$$

маємо рівність:

$$l_k = l_{k-2} + 1 + c_{k-1}. \qquad (3)$$

Стандартним чином не важко одержати, що

$$L_{k+1} = 2L_k + L_{k-1} - 2L_{k-2},\ L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 5,$$

звідки, розв'язавши лінійне рекурентне співвідношення, маємо, що

$$L_k = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^k + \frac{2}{3} \cdot 2^k.$$

Таким чином при $k = 2011$ шукане значення натискань дорівнює $L_{2011} = \frac{2^{2012}-1}{3}$.

4. Знайти усі додатні дійсні числа x, y, z, серед яких є різні, та натуральні числа n, для яких виконуються умови:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1, \qquad \sqrt{x+n} + \sqrt{y+n} + \sqrt{z+n} \in \mathbb{N}.$$

Відповідь: Шуканих чисел не існує.

Розв'язання. Позначимо через $A = \sqrt{x+n} + \sqrt{y+n} + \sqrt{z+n} \in \mathbb{N}$. Тоді

$$A^2 = 3n + x + y + z + 2\left(\sqrt{(x+n)(y+n)} + \sqrt{(x+n)(z+n)} + \sqrt{(z+n)(y+n)}\right).$$

З нерівності між середніми $\sqrt{(x+n)(y+n)} \leq n + \frac{x+y}{2}$, оскільки не усі змінні x, y, z рівні між собою, то

$$A^2 < 9n + 3(x+y+z) \leq 9n + 3. \qquad (1)$$

остання нерівність виконується з очевидної нерівності: $x + y + z \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$.

З іншого боку, $\sqrt{(x+n)(y+n)} \geq n + \sqrt{xy}$, що легко перевірити шялхом піднесення до квадрату. Знову при не усіх рівних між собою x, y, z маємо, що

$$A^2 > 9n + (x+y+z) + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{zy}) = 9n + (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = 9n + 1. \quad (2)$$

З нерівностей (1) та (2) маємо при цілих n, що рівність можлива лише за умови

$$A^2 = 9n + 2,$$

а ця умова неможлива, оскільки квадрат цілого числа не може давати остачу 2 при діленні на 9. Одержана суперечність показує, що шуканих чисел не існує.