Теорія Чисел

Ківва Богдан 30bohdan@gmail.com

1) Доведіть, що рівняня $\frac{x^7-1}{x-1}=y^5-1$ не має розв'язків в натуральних числах.
2) Натуральні числа a,b такі, що для довільного n $(a^n+n)\vdots(b^n+n)$. Довести, що $a=b$.
3) Доведіть, що $P(x)=(x^2+x)^{2^n}+1$ незвідний над полем раціональних чисел.
4) $P(x),Q(x)$ - многочлени з цілими коефіціентами. Такі, що немає відмінного від константи многочлена з раціональними коефіціентами, що ділить їх. Відомо, що для кожного натурального n виконано $(3^{P(n)}-1)\vdots(2^{Q(n)}-1)$. Довести, що $Q(x)$ - константа.
5) Нехай p - непарне просте. Для кожного a визначимо $S_a=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{a^j}{j}$. Нехай m,n - цілі та виконано $S_3+S_4-3S_2=\frac{m}{n}$. Довести, що $m\vdots p$.
6) Множина B цілих чисел називається різницевим базисом для множини $N=\{1,2,3,...,n\}$, якщо для довільного $d\in N$ існують $b,b'\in B$ такі, що $b-b'=d$. Позначимо через $k(n)$ найменше число елементів з різницевого базису для N. Доведіть, що $k(n)^2\ge(1+\frac{2}{3\pi})(2n+1)$.
7) Натуральні числа a,b,c такі, що $c(c^2-c+1)$ ділиться на ab, а $(a+b)\vdots(c^2+1)$. Доведіть, що $\{a,b\}=\{c,c^2-c+1\}$.
8) Натуральні числа $c>1,a_1,a_2,...,a_n$ такі, що $c\vdots(\prod_{i=1}^{n}a_i)$. Довести, що $\frac{c^n+c-1}{\prod_{i=1}^{n}(c+a_i-1)}\notin\mathbb{Z}$.
9) Знайти всі ін'єктивні функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для яких виконано: якщо S - скінченна множина натуральних чисел та $\sum_{s\in S}\frac{1}{s}$ - ціле, то $\sum_{s\in S}\frac{1}{f(s)}$ - ціле.
10) Для простого числа p множина S остач по модулю p називається вільною від сум мультиплікативної підгрупою F_p, якщо існує остача α по модулю p, що $S=\{1,\alpha,\alpha^2...\}$ та для довільних остач $a,b,c\in S$ маємо, що $(a+b-c)$ не ділиться на p. Доведіть, що для довільного n існує просте число p та відповідна вільна від сум мультиплікативна група S, що $|S|\ge n$.