Зимний каникулярник

...у детей украли кусочек счастья

1 Старое

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, которые удовлетворяют
$$(P(x))^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

3. Обозначим $d(k)$ количество всех делителей числа k. Найдите все натуральные числа n, что
$$d(n)^3 = 4n.$$

4. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что
$$(\phi(a^n - 1), n) > 1.$$

2 Разное

1. Для каждого трёхзначного числа напишем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трёхзначных чисел, складываем. Какое число получится?

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касаельная — та из двух, которая расположена ближе к точке B, чем к точке A. Она касается первой окружности в точке C , а второй — в точке D. Прямая CB пересекает вторую окружность второй раз в E. Докажите, что AD — биссектриса угла $\angle CAE$.

3. Найдите все натуральные m и n, удовлетворяющие равенству
$$2^{m^2} = 7n + 4.$$

4. Числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $ab + cd > 0$, $ac + bd > 0$ и $a^2 + d^2 = c^2 + b^2$. Докажите, что $ad + bc > 0$.

5. Шахматный король обошёл всю доску, побывав в каждом поле ровно по одному разу и вернувшись последним ходом на исходное поле. Докажите, что король сделал чётное количество ходов по диагонали.

6. Можно ли написать в каждой вершине куба по натуральному числу так, чтобы в любой паре соединённых вершин одно число делится на другое, а во всех других парах такого не было?

7. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$(a+b+c)^2 + ab + bc + ca \geq 6\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

8. Найдите все действительные числа a, b, c, d, удовлетворяющие условию:
$$\begin{cases} a+b+c+d = 20, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = 150. \end{cases}$$

9. Пускай x — некоторое действительное число. Известно, что числа x^3 и x^2+x — рациональные. Докажите, что и x — рациональное.

10. Для положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{c}}{2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq 3.$$

11. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ является полным квадратом.

12. Пускай D — некоторая отличная от вершин точка на стороне BC равностороннего треугольника ABC. Пускай I — центр вневписанной окружности в треугольник ABD, которая касается стороны AB, а J — центр вневписанной окружности треугольника ACD, которая касается стороны AC. Описанные окружности треугольников ABI и ACJ пересекаются во второй раз в точке E. Докажите, что A — инцентр треугольника IJE.

13. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается ω_1 в точке B. Пускай AB — диаметр этой окружности. Из точки A проводится касательная AC к ω_2. Докажите, что ω_1 делит пополам отрезок BC.

14. За круглым столом сидят десять человек, у каждого перед собой лежат монеты. Всего монет 100 штук. По сигналу они одновременно передают соседу справа часть своих монет: если монет у них чётное количество - то половину, а если нечётное - то одну и половину остатка. Такая операция проводится второй раз, потом третий и так до бесконечности. Докажите, что когда-нибудь у всех станет по 10 монет.

15. Числа $a_1, \ldots a_n$ такие, что
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}.$$
Докажите, что для любого натурального i такого, что $1\leq i\leq n$, среди чисел $a_1, \ldots a_n$ найдутся i таких, что их сумма больше либо равна i.

16. Целые числа a, b удовлетворяют соотношению
$$a = a^2 - 2ab + b^2 - 8b + 16.$$
Докажите, что a — полный квадрат.

3 Комбинаторная геометрия

1. Пусть A — сумма попарных расстояний между точками некоторого конечного множества, в котором точек четное количество. Половину точек закрыли и посчитали новую сумму попарных расстояний — B. Докажите, что $A \geq 2B$.

2. Центры некоторых клеток квадрата со стороной 15 соединили отрезками так, что получилась замкнутая ломаная без самопересечений, симметричная относительно главной диагонали. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

4 Комбинаторика

1. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

2. 40 членов жюри подбирают задачу для городской олимпиады. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины, но не все члены жюри. Каждый из них решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они могут подобрать нужную задачу.

3. В вершинах правильного пятиугольника $ABCDE$ записаны целые числа, сумма которых равна 2014. За один ход можно выбрать целое число m и вершину пятиугольника, вычесть из числа в этой вершине $2m$ и прибавить к числам в двух соседних вершинах по m. Последовательность ходов назовем выигрышной, если в результате её выполнения в одной из вершин стоит число 2014, а в оставшихся — 0. Докажите, что вершина, в которой в конце окажется 2014, не изменится при любой выигрышной последовательности ходов.

4. В стране гномов есть 200 пещер, некоторые из них соединены туннелями. Начиная с 1 января 2014 года, гномы каждый день засыпают все старые туннели и роют новые между каждой парой пещер, из которых перед этим выходило одинаковое количество туннелей. В некоторых N пещерах живет по одному Виктору Фёдорычу. При каком наименьшем N какие-то два из них смогут встретиться независимо от того, как в начале были расположены туннели.

5. На окружности расставлены 2013 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1, причем не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдем произведение в каждом десятке и сложим эти числа. Какая наибольшая сумма может получиться?

6. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

5 Теория чисел

1. Пускай p — простое число. Найдите все целочисленные решения уравнения $p(x+y) = xy$.

2. Про строго возрастающую последовательность натуральных чисел a_n известно, что $a_{n+1} < a_n + 100$. Докажите, что найдется бесконечно много простых чисел, каждое из которых делит хотя бы один элемент последовательности a_n.

3. Последовательность натуральных чисел a_n задана по правилу:

$$a_1 = k, a_2 = k+1, a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + 1, n \geq 2.$$

Докажите, что для любого натурального k и любого простого числа p в этой последовательности встретится число, кратное .

6 Геометрия

1. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. K — середина меньшей дуги BC этой окружности, N — середина отрезка AC. Касательные к окружноти в точках A и C пересекаются в E, NK во второй раз пересекает окружность в точке M. Докажите, что $\angle EMK = 90°$.

2. Пускай H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. M, N — середины сторон AB, BC соответственно. Лучи MH и NH пересекают описанную окружность ABC в точках K, L. Докажите, что прямые BH, KC, LA пересекаются в одной точке.

3. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в F. Докажите, что ортоцентры треугольников FAB, FCD, EAD и ECB лежат на одной прямой.

4. Пусть AB – общая внешняя касательная к окружностям Γ_1 и Γ_2 (точка A лежит на Γ_1), C – точка пересечения этих окружностей. Перпендикуляр из B на AC пересекает прямую, проходящую через центры Γ_1 и Γ_2, в точке D. Докажите, что $\angle BCD = 90°$.

5. К окружностям Γ_1 и Γ_2 провели общую внешнюю касательную AB и общую внутреннюю касательную CD (A и C лежат на Γ_1). Докажите, что точка пересечения AC и BD лежит на прямой, которая проходит через центры Γ_1 и Γ_2.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AD выбрана точка X таким образом, что $\angle XCD = \angle BCA$. Прямые CX и AB пересеклись в точке Y. Точка O — центр описанной окружности треугольника AXY. Докажите, что прямая CO перпендикулярна прямой BD.

7. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.