7-й Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової

Математичний бій № 3

Старша ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Для додатних чисел x, y, z довести нерівність:

$$\frac{xy}{xy+x^2+y^2}+\frac{xz}{xz+x^2+z^2}+\frac{zy}{zy+z^2+y^2}\le\frac{x}{2x+z}+\frac{y}{2y+x}+\frac{z}{2z+y}.$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність у більш зручному вигляді:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}}\le\frac{1}{2+\frac{z}{x}}+\frac{1}{2+\frac{x}{y}}+\frac{1}{2+\frac{y}{z}}.$$

Позначимо $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, тоді $abc=1$ і нерівність набуває вигляду

$$\frac{1}{1+a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+b+\frac{1}{b}}+\frac{1}{1+c+\frac{1}{c}}\le\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Після тотожних перетворень з використанням рівності $abc=1$ одержимо, що треба довести таку нерівність:

$$\frac{3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)+(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)(ab+bc+ca)+(a+b+c)^2}\le$$

$$\le\frac{12+4(a+b+c)+(ab+bc+ca)}{9+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)}.$$

Розглянемо такі підстановки $S=a+b+c$, $P=ab+bc+ca$ і нерівність набуває такого вигляду: $\frac{3S+3P+PS}{P^2+PS+S^2}\le\frac{12+4S+P}{9+2P+4S}$. Неважко показати, що $S^2\ge 3P$, а також $S\ge 3$, $P\ge 3$ (бо $abc=1$), тоді $4S^3=4S^2\cdot S\ge 12PS$, $PS^2=S\cdot PS\ge 3PS$, $3P^2S\ge 27S$, $P^3\ge 9P$, $6P^2\ge 18P$. Якщо використати усі ці нерівності, то побачимо, що наведена нерівність вірна. Рівність можлива лише при умові $S^2=3P=9\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z$.

2. Нехай $n\ge 3$ — натуральне число. Знайти всі набори $f_1, f_2, \ldots, f_n$ відмінних від констант поліномів із дійсними коефіцієнтами, для яких при всіх дійсних x та для кожного $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ справджується рівність:

$$f_k(x)f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f_{k+2}(x)),$$

де $f_{n+1}\equiv f_1, f_{n+2}\equiv f_2$.

Відповідь: $f_k(x)=x^2$, для усіх $k\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Розв'язання. Позначимо степені поліномів через $\deg(f_k)=\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$. Усі індекси в подальшому будемо рахувати за модулем n. З умов задачі маємо такі рівності: $\alpha_k+\alpha_{k+1}=\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}$, тобто $\alpha_{k+1}|\alpha_k$ для кожного k, тому вони усі рівні, звідки легко знаходимо, що усі вони рівні 2.

Позначимо $f_k(x)=a_kx^2+b_kx+c_k$, $a_1a_2\ldots a_n\ne 0$. Якщо у вихідній рівності зібрати коефіцієнти при x^4, одержимо $a_k=a_{k+2}^2$ (звідси, зокрема, випливає, що a_k додатні для всіх k). Якщо $n=2m$, то маємо такий ланцюг рівностей: $a_1=a_3^2=(a_5^2)^2=\ldots=a_{2m-1}^{2^{m-1}}=a_1^{2^m}$ $\Rightarrow a_1=a_3=\ldots=a_{2m-1}=1$, аналогічно й $a_2=a_4=\ldots=a_{2m}=1$. Для непарного n відразу одержимо, що $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$. Таким чином, $f_k(x)=x^2+b_kx+c_k$, $k=\overline{1,n}$.

Зберемо тепер коефіцієнти при x^3: $b_k+b_{k+1}=2b_{k+2}$, $k=\overline{1,n}$. Нехай $\min\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}=b_s=b$, тоді з рівності $b_{s-2}+b_{s-1}=2b_s$ випливає, що й $b_{s-2}=b_{s-1}=b\Rightarrow b_1=b_2=\ldots=b_n=b$. Зберемо коефіцієнти при x^2: $c_k+c_{k+1}=2c_{k+2}+b$, $k=\overline{1,n}$. Якщо тепер усі ці n рівностей додати, то вийде, що усі c_k скоротяться і залишиться рівність $nb=0\Rightarrow b=0$.

Але якщо для коефіцієнтів c_k застосувати ті самі міркування, що раніше до b_k, то вийде, що $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$. Таким чином, $f_k(x) = x^2 + c$, $k = \overline{1,n}$.

Залишається такий вигляд полінома підставити у задану рівність, і ми будемо мати:

$$(x^2 + c)(x^2 + c) = (x^2 + c)^2 + c \Leftrightarrow c = 0,$$

і маємо шукану відповідь: $f_k(x) = x^2$, $k = \overline{1,n}$.

3. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, такий що трикутник BCD гострокутний та $AB = AD$. Позначимо перетин бісектриси кута CAD зі стороною CD через K та перетин бісектриси кута BAC зі стороною BC через L. Нехай K', L' — ортогональні проекції точок K, L на сторони BC та CD відповідно. Довести, що точки B, D, K', L' — циклічні.

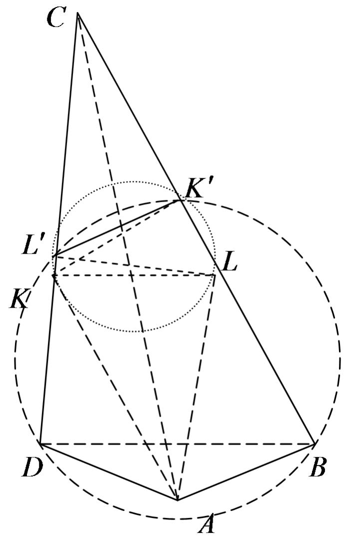


Рис.G-009

Розв'язання. З властивостей бісектрис внутрішніх кутів трикутника маємо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL}$ та $\frac{AD}{AC} = \frac{DK}{CK} \Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{DK}{CK}$, тому $\frac{CB}{CL} = \frac{BL+CL}{CL} = \frac{BL}{CL} + 1 = \frac{DK}{CK} + 1 = \frac{DK+CK}{CK} = \frac{CD}{CK}$, тому $\triangle DCB \sim \triangle KCL$, звідки $KL \parallel BD$, з того, що кути $\angle LL'K$ та $\angle KK'L$ – прямі, випливає, що точки K, L, K', L' – циклічні, з гострокутності $\triangle BCD$ випливає, що точки K' та L' лежать на відповідних бічних сторонах $\triangle CKL$, тому $\pi = \angle K'L'K + \angle KLK' = \angle K'L'D + \angle DBK'$, звідки й випливає циклічність точок B, D, K', L'.

4. На відрізку AB, що має довжину 16, відмічено точку C так, що $BC = 6$. По один бік від прямої AB обрані точки X та Y, які задовольняють такі умови: $YB = YC = 5$, $XA = 10$, $XC = 12$. Доведіть, що $XY > AC$.

Розв'язання. Оскільки $AC = AX = 2CY = 2YB = 10$, також $CX = 2CB$, тому $\triangle ACX \sim \triangle YCB$ за трьома сторонами, звідси $\angle ACX = \angle YCB = \angle YBC = \gamma$ і $\angle XCY = 180^\circ - 2\gamma = \angle CYB = \alpha$. З $\triangle BCY$ знаходимо, що $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, тепер легко з $\triangle XCY$ знаходимо за теоремою косинусів:

$$XY^2 = CX^2 + CY^2 - 2 \cdot CX \cdot CY \cdot \cos\alpha = 135{,}4 > 100 = AC^2,$$

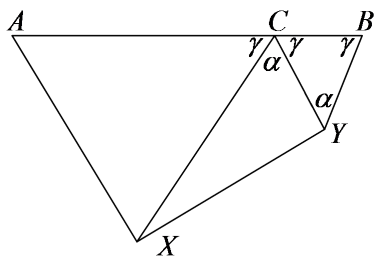


Рис.10

що й треба було довести.

5. Розглянемо рівняння $x^2 + y^2 - axy + 2 = 0$, де a — натуральний параметр.

а) Покажіть, що при $a \neq 4$ не існує пар натуральних чисел (x, y), які задовольняють це рівняння.

б) Доведіть, що при $a = 4$ таких розв'язків є нескінченно багато, та визначте всі пари, які задовольняють це рівняння.

Відповідь: б) (x, y) при $x = x_n$, $y = x_{n+1}$, або $x = x_{n+1}$, $y = x_n$, де $x_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2 + \sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt{3})^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$; пара $(1, 1)$.

Розв'язання. а) При $a \neq 4$ спочатку розглянемо випадок $x = y$, тоді легко одержати, що $(a-2)x^2 = 2$, звідки $a - 2 = 2$ та $x = 1$, що суперечить вибору a.

Припустимо, задане рівняння

$$x^2 + y^2 - axy + 2 = 0 \qquad (1)$$

має хоча б один розв'язок в натуральних числах. Виберемо пару (x_0, y_0), яка є розв'язком рівняння і для якої сума $x_0 + y_0$ найменша можлива серед усіх розв'язків. Без обмежень загальності можемо вважати, що $x_0 > y_0$. Таким чином, $x_0^2 + y_0^2 - ax_0y_0 + 2 = 0$, а це рівносильне $(ay_0 - x_0)^2 + y_0^2 - a(ay_0 - x_0)y_0 + 2 = x_0^2 + y_0^2 - ax_0y_0 + 2 = 0$. Таким чином, розв'язком рівняння (1) також є пара $(x_1, y_0) = (ay_0 - x_0, y_0)$, що має властивість $x_1 = ay_0 - x_0 > 0$. Остання умова випливає з рівностей $x_0(ay_0 - x_0) = ax_0y_0 - x_0^2 = y_0^2 + 2$, навіть більше, ми маємо, що $x_0 > x_1 = ay_0 - x_0$. Дійсно, це рівносильне $x_0^2 > x_0(ay_0 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 > y_0^2 + 2 \Leftrightarrow x_0^2 - y_0^2 > 2$, що, очевидно, для заданих натуральних чисел справджується. Отже, ми знайшли розв'язок (x_1, y_0), для якого $x_1 + y_0 < x_0 + y_0$, що суперечить вибору пари (x_0, y_0).

б) При $a = 4$ задане рівняння набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 - 4xy + 2 = 0. \qquad (2)$$

Легко переконатись, що при $x = y$ воно має єдиний натуральний розв'язок $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Можна тепер розглянути пару $(x_1, y_1) = (4x_0 - y_0, x_0) = (3, 1)$, яка також є розв'язком нашого рівняння.

Розглянемо тепер довільний натуральний розв'язок (x_1, y_1) рівняння (2), де $x_1 > y_1 \geq 1$. Але тоді маємо, $(4x_1 - y_1)^2 + x_1^2 - 4(4x_1 - y_1)x_1 + 2 = x_1^2 + y_1^2 - 4x_1y_1 + 2 = 0$, тому пара $(x_2, y_2) = (4x_1 - y_1, x_1)$ також є розв'язком (2), оскільки x_2, y_2 – натуральні, що випливає з умови $x_2y_1 = (4x_1 - y_1)y_1 = 4x_1y_1 - y_1^2 = x_1^2 + 2 > 0$. Крім того, $y_2 = x_1 > y_1$ та $x_2 = 4x_1 - y_1 = 3x_1 + (x_1 - y_1) > 3x_1 > x_1 = y_2$. Таким чином, ми маємо цілу нескінченну послідовність пар натуральних чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$ таких що $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ та $y_0 < y_1 < \ldots < y_n < \ldots$. Крім того, $x_{n+1} = 4x_n - y_n$, $y_{n+1} = x_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 = y_0 = 1$. Тепер вже можна знайти й загальний розв'язок цієї системи. Послідовність (x_n) задається такими умовами: $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$. Використаємо відому процедуру пошуку загального розв'язку лінійного рекурентного співвідношення: $t^2 - 4t + 1 = 0$ – характеристичне рівняння, його корені $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Загальний розв'язок запишемо у вигляді $x_n = c_1t_1^n + c_2t_2^n$. З початкових умов знаходимо: $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$.

Якщо розглянути довільний розв'язок (x, y) рівняння (2), де $x > y > 1$, то можна побачити, що пара $(y, 4y - x)$ – також розв'язок, і $4y - x < y$. Це справджується, тому що $4y - x < y \Leftrightarrow x - 3y > 0$, а оскільки $x - y > 0$, то остання умова рівносильна $(x - y)(x - 3y) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 3y^2 - 4xy > 0 \Leftrightarrow 2(y^2 - 1) > 0$. Отже, після декількох кроків ми одержимо розв'язок (x_1, y_1) з $y_1 = 1$. При цьому $x_1^2 + y_1^2 - 4x_1y_1 + 2 = 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = 1$, а оскільки $x_1 > y_1 = 1$, то $x_1 = 3$. Залишилось зауважити, що перетворення, яке розглядалося в цьому абзаці, є оберненим до того, яке розглядалося в попередньому. Тому будь-який розв'язок (x, y), де $x > y$, можна отримати з розв'язку $(3, 1)$ (а отже, і з $(1, 1)$) шляхом повторень перетворення, описаного в попередньому абзаці. Аналогічно отримуються й розв'язки, в яких $x < y$.

6. Знайти всі пари простих чисел (p, q), для яких $pq | (5^p + 5^q)$.

Відповідь: $(2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5), (5, 313), (313, 5)$.

Розв'язання. Якщо $2 | pq$, то без обмеження загальності покладемо $p = 2$ та треба, щоб виконувалась умова: $q | (5^q + 25)$. З теореми Ферма $q | (5^q - 5) \Rightarrow q | 30$, далі простим перебором знаходимо розв'язки: $(2, 3)$ та $(2, 5)$.

Якщо $5 | pq$, то знову покладемо $p = 5$ і будемо мати, що $q | (5^q + 5^5)$, знову з теореми Ферма $q | (5^q - 5) \Rightarrow q | 3130$, і знову підбираємо розв'язки: $(5, 5)$ та $(5, 313)$ (і $(5, 2)$, який уже було знайдено).

Далі вважаємо, що $pq | (5^{p-1} + 5^{q-1})$, тому $(5^{p-1} + 5^{q-1}) \equiv 0 \pmod{p}$, за теоремою Ферма $5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, тобто $5^{q-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Позначимо $p - 1 = 2^k(2r - 1)$ та $q - 1 = 2^l(2s - 1)$, де k, l, r, s – натуральні числа.

Якщо $k \leq l \Rightarrow 1 = 1^{2^{l-k}(2s-1)} \equiv (5^{p-1})^{2^{l-k}(2s-1)} = 5^{2^l(2r-1)(2s-1)} = (5^{q-1})^{2r-1} \equiv (-1)^{2r-1} \equiv -1 \pmod{p}$, що суперечить умові $p \neq 2$, тому $k > l$, що так само суперечить умові вибору p, q, які є абсолютно рівноправними. Таким чином, (з урахуванням симетричності) всі розв'язки знайдені.

7. Назвемо півплощиною множину точок на площині, які розташовані по один бік від деякої прямої, не враховуючи точок самої прямої. На площині задана множина S з n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки підмножин з S можна одержати як перетин множини S та деякої півплощини?

Відповідь: $n^2 - n + 2$.

Розв'язання. Зафіксуємо декартову систему координат XOY. Тоді підмножина $T \subset S$ задовольняє умови тоді і тільки тоді, коли існує лінійна функція $f(x,y)$ від двох змінних x, y така, що $f(P) > 0, P \in T$ і $f(P) < 0, P \in S \setminus T$. Якщо f задовольняє ці умови, то будемо казати, що f відрізає підмножину T від множини S.

Доведення наведеної відповіді проведемо ММІ, для $n = 1$ – очевидно. Нехай твердження справджується $\forall k \leq n-1$. Тепер покажемо, що воно справджується для $k = n$. Нехай $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, позначимо через $X(S)$ сукупність усіх таких підмножин $T \subset S$, які задовольняють умову задачі. Позначимо множину $S' = S \setminus \{P_n\}$ та аналогічно визначимо сукупність $X(S')$. Розглянемо таке відображення: $F\colon X(S) \to X(S')$, яке визначається таким чином: $F(T) = T \cap S'$, $T \in X(S)$. Очевидно, що $F^{-1}(T) \subset \{T, T \cup \{P_n\}\}$ $\forall T \in X(S')$. Нехай $T \in X(S')$ і $f(x,y)$ – лінійна функція, яка відрізає T від S'. Якщо $f(P_n) \geq 0$, то для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ функція $f(x,y) + \varepsilon$ відрізає $T \cup \{P_n\}$ від S. Тому $T \cup \{P_n\} \in X(S)$; якщо $f(P_n) \leq 0$, то функція $f(x,y) - \varepsilon$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$ буде відрізати T від S, тому $T \in X(S)$. Таким чином, відображення сюр'єктивне, а також $\forall T \in X(S')$ ми маємо, що $F^{-1}(T)$ містить один або два елементи. Для продовження доведення треба довести лему.

Лема. Для $T \in X(S')$ такі дві умови еквівалентні:

1) Існує лінійна функція $f(x,y)$, яка відрізає T від S' і для якої $f(P_n) = 0$.

2) $f^{-1}(T)$ містить два елементи.

Доведення. Умова 2) означає, що $f^{-1}(T) = \{T, T \cup \{P_n\}\}$. Умова 1) означає, що для достатньо малого $\varepsilon > 0$ функція $f(x,y) \pm \varepsilon$ відрізає від S відповідно $T \cup \{P_n\}$ та T. Тобто, множини $T \cup \{P_n\}$ та T належать $X(S)$, і умова 2) виконана.

Якщо умова 2) виконується, то $f(x,y)$ та $g(x,y)$ відрізають відповідно T та $T \cup \{P_n\}$ від S. Покладемо $\lambda = -\frac{f(P_n)}{g(P_n)}$. Тоді лінійна функція $f + \lambda g$ приймає значення 0 у точці P_n та відрізає T від S', оскільки $\lambda > 0$. Тобто, умова 1) виконана.

Лема доведена.

Продовжимо розв'язання задачі. Оскільки F сюр'єктивна, то з леми маємо, що число $|X(S) - x(S')|$ співпадає з числом множин T, які визначаються умовою 1 леми. Будемо вважати, що в усіх точок абсциси різні, інакше просто достатньо трохи повернути систему координат. Нехай a – число, що відмінне від абсциси точки P_n. Тоді $\forall P_i \in S'$ позначимо точки (a, y_i) як точки перетину прямих $x = a$ та P_nP_i. З умови загального положення точок, усі числа $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ різні. Ми також бачимо, що множина T, яка задовольняє умову 1) леми, рівносильна твердженню, що $T = \{P_i \in S' | h(y_i) > 0\}$ для деякої лінійної функції $h(y)$ від однієї змінної (уявіть, що вздовж прямої $x = a$ «бігає» точка y, а з нею півплощина, що обмежується прямою, яка проходить через точки P_n та (a, y)). Загальна кількість таких підмножин складає $2(n-1)$. Таким чином, за припущенням індукції маємо: $|X(S)| = |X(S')| + 2(n-1) = (n-1)^2 - (n-1) + 2 + 2(n-1) = n^2 - n + 2$, що й треба було довести.

8. У групі 30 студентів, кожному з них подобається рівно k інших студентів з цієї групи. При цьому якщо студенту А подобається студент Б, то студенту Б не обов'язково подобається студент А. Знайдіть найменше k, при якому можна стверджувати, що в цій групі обов'язково є двоє, які подобаються одне одному.

Відповідь: $k = 15$.

Розв'язання. Покажемо спочатку, що при менших k можлива ситуація, при якій немає взаємно знайомої пари. Перенумеруємо студентів числами від 0 до 29 і будемо вважати, що кожному студенту з номером n подобаються усі студенти з номерами $n+1, n+2, \ldots, n+k$ за модулем 30. Тоді потрібної пари не утворюється.

При $k = 15$ розглянемо вподобання на орієнтованому графі, в якому студенти – вершини, а вподобання – ребра (тобто стрілки з однієї вершину в іншу). Ми розставимо в графі рівно $30 \cdot 15 = 450$ стрілок, серед них пари стрілок між двома вершинами, що йдуть в обидва боки, відповідають парам студентів, які подобаються одне одному. Всього пар вершин у графі є $C_{30}^2 = 435 < 450$, тобто принаймні декілька пар вершин з'єднані стрілками в обох напрямах, що й означає наявність пар студентів, які подобаються одне одному.

Математичний бій № 3

Старша ліга

Група Б

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "А"

2. Знайти всі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, які для довільних цілих m та n задовольняють умову:

$$f(m+n)+f(mn-1)=f(m)f(n)+2.$$

Відповідь: $f(n)=n^2+1$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що функція відмінна від сталої. Якщо припустити, що $\forall n\in\mathbb{Z}\ f(n)=c$, то $2c=c^2+2$ – не має розв'язків.

Покладемо $m=0\Rightarrow f(n)+f(-1)=f(n)f(0)+2\Rightarrow f(n)(1-f(0))$ – стала величина. З попереднього абзацу випливає, що $f(0)=1$, з того ж самого співвідношення $f(-1)=2$.

Покладемо $m=n=-1\Rightarrow f(-2)+f(0)=(f(-1))^2+2\Rightarrow f(-2)=5$.

Покладемо , $m=1, n=-1\Rightarrow f(0)+f(-2)=f(1)f(-1)+2\Rightarrow f(1)=2$.

Покладемо $m=1\Rightarrow f(n+1)+f(n-1)=f(1)f(n)+2$, а це рівносильне $f(n+1)=2f(n)+2-f(n-1)$. Якщо припустити для ММІ, що $f(n)=n^2+1$, то індукцією для натуральних n доводимо цю рівність. Скориставшись тим, що $f(n-1)=2f(n)+2-f(n+1)$, можна аналогічно довести твердження для від'ємних цілих n. Залишилось переконатися, що функція $f(n)=n^2+1$ справді задовольняє умову.

3. Задача № 3 старша ліга група "А"

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Нехай $f(x)=c_nx^n+\ldots+c_1x+c_0$ — многочлен з цілими ненульовими коефіцієнтами. Визначимо послідовність (a_n) таким чином: $a_1=0$, $a_{n+1}=f(a_n)$ для всіх натуральних n. Довести, що $a_{2010}\neq 0$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що для будь-яких натуральних $i<j$ $(a_{j+1}-a_j)=k(a_{i+1}-a_i)$, де k – ціле. За принципом ММІ достатньо довести, що виконується така умова: $(a_{i+2}-a_{i+1}=k(a_{i+1}-a_i)$. Якщо $a_{i+1}-a_i=0$, то все очевидне. Інакше,

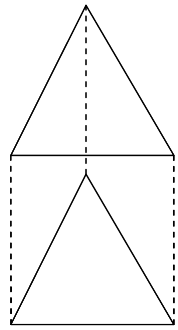


Рис.12

$$a_{i+2}-a_{i+1}=f(a_{i+1})-f(a_i)=c_n(a_{i+1}^n-a_i^n)+\ldots c_1(a_{i+1}-a_i)=k(a_{i+1}-a_i),$$

що й треба було довести.

Якщо припустити, що $a_{2010}=0$, то $a_2-a_1=f(0)=a_{2011}-a_{2010}$. Виходячи з попереднього, ми бачимо, що $f(0)=a_{2011}-a_{2010}=k(a_2-a_1)=kf(0)$, тобто $k=1$, і кожна з різниць $a_2-a_1, a_3-a_2,\ldots,a_{2010}-a_{2009}$ дорівнює $\pm f(0)$. Сума всіх цих чисел дорівнює $a_{2010}-a_1$, але кількість доданків непарна і $f(0)=c_0\neq 0$, тому $a_{2010}=a_{2010}-a_1\neq 0$. Одержана суперечність завершує доведення.

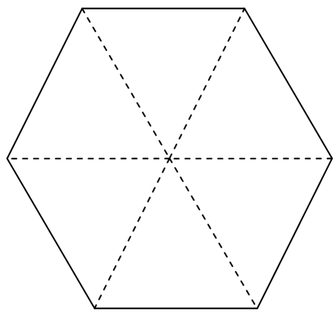


Рис.13

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. Для яких натуральних n на площині існує множина S із n точок, яка має таку властивість: для будь-якої точки A з множини S існує принаймні три точки з цієї ж множини на відстані 1 від точки A?

Відповідь: $n\geq 6$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що для будь-яких натуральних $n\geq 6$ така множина точок існує. Для цього наведемо приклад таких множин для $n=6,7,8$ (рис. 12, 13 та 14).

А тепер покажемо, як будується така множина для усіх інших $n \geq 9$. Як складовою частиною кожної з попередніх множин є правильний трикутник зі стороною 1, а далі достатньо цей трикутник просто зсунути на відстань 1 у будь-якому напрямі, який не суміщає жодну з нових трьох точок з жодною з уже існуючих. Зрозуміло, що вказана конструкція задовольняє умову для $n+3$ точок і містить правильний трикутник зі стороною 1, якщо перед цим конструкція для n точок задовольняла умову. Дійсно, кожна з нових трьох точок має дві точки на відстані 1 у новому трикутнику, а також ще одну точку зі старих, що належить тому трикутнику, який був зсунутий. Дуже наочно цей механізм показаний на рис. 12.

Тепер розглянемо випадок менших n. Для $n = 4$ відстань між кожною парою точок має бути одиничною. Для трьох точок будуємо правильний трикутник зі стороною 1, а от четверту точку побудувати з виконанням потрібної умови вже, очевидно, не можна.

Для $n = 5$ припустимо, що потрібна конструкція існує. Розглянемо граф, у якому точки є вершинами, а ребрами є тільки ті відрізки, що мають довжину 1. Кожна вершина за умовою повинна мати степінь, не менший за 3. Маємо граф з непарною кількістю вершин, який повинен мати вершину з парною кількістю ребер, тому степінь якоїсь вершини повинен дорівнювати 4. Позначимо точку, що відповідає цій вершині, як O. Решта чотири точки повинні бути розташовані на одиничному колі з центром у точці O. Але легко збагнути, що розташувати точки в такий спосіб, щоб виконувалась умова задачі, неможливо.

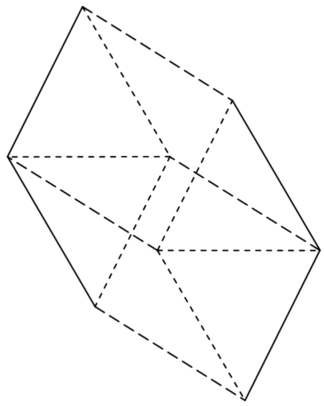


Рис.14

8. Задача № 8 старша ліга група "А"

Математичний бій № 3

Старша ліга

Група B

Умови та розв'язки

1. Для невід'ємних чисел x, y довести нерівність

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geqslant 4x^2y^2.$$

Коли досягатиметься рівність?

Відповідь: Рівність досягатиметься при $x = y = 0$ або $x = y = 1$.

Розв'язання. За нерівністю Коші $x + y^3 \geqslant 2\sqrt{xy^3}$ і $x^3 + y \geqslant 2\sqrt{x^3y}$. Перемноживши ці дві нерівності, одержимо дану. Очевидно, що рівність буде лише у випадку, коли $x = y^3$ і $x^3 = y$ (або $x + y^3 = 0$ чи $x^3 + y = 0$). Звідси одержуємо, що $x = y = 0$ або $x = y = 1$.

2. Задача № 2 старша ліга група "Б"

3. Задача № 3 старша ліга група "А"

4. У квадраті $ABCD$ на стороні AB вибрана точка H таким чином, що $AB \cdot BH = AH^2$. Точки E та X є серединами відрізків AD та AH відповідно. Нехай точка Y — основа перпендикуляра, що опущений з точки X на відрізок BE. Доведіть, що $XY = XH$.

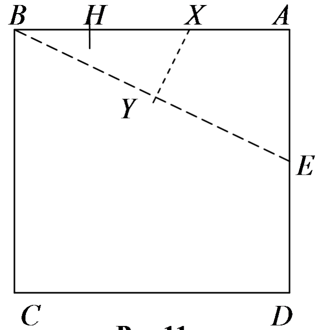


Рис.11

Розв'язання. Позначимо сторони квадрата через $2a$, відрізок $AH = x$, тоді умови задачі можемо записати таким чином:

$$x^2 = 2a(2a - x).$$

З теореми Піфагора $BE^2 = 5a^2$, з подібності трикутників BYX та BAE маємо: $\frac{BE}{EA} = \frac{BX}{XY}$. Звідси маємо, що

$$XY^2 = \frac{EA^2 \cdot BX^2}{BE^2} = \frac{BX^2}{5} = \frac{1}{5}\left(2a - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(4a^2 - 2ax + \frac{x^2}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(2a(2a-x) + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{5}\left(x^2 + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4} = XH^2,$$

що й треба було довести.

5. Задача № 5 старша ліга група "Б"

6. Довести, що існує нескінченна кількість натуральних чисел n, для яких обидва корені квадратного рівняння $x^2 + (2 - 3n^2)x + (n^2 - 1)^2 = 0$ є повними квадратами.

Розв'язання. Якщо a^2 та b^2 – корені цього рівняння, $a \geq 0, b \geq 0$, то вони задовольняють такі умови: $a^2 + b^2 = 3n^2 - 2$ та $a^2b^2 = (n^2-1)^2 \Rightarrow ab = n^2 - 1$. Якщо тепер звільнитись від n^2, маємо: $ab + 1 = (a-b)^2$. Таким чином, якщо a, b задовольняють останню умову і $a \neq b$, то одержимо $n^2 = ab + 1 = (a-b)^2$ і $n = |a - b|$, яке задовольняє умову. Різним (невпорядкованим) парам (a, b) при цьому відповідають різні значення n, бо інакше вийшло б, що одне й те саме квадратне рівняння має дві різні пари розв'язків. Залишається показати, що рівняння $ab + 1 = (a-b)^2$ має нескінченну кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах. Це зробити легко. $(3, 1)$ – розв'язок; якщо (a_1, b_1) – розв'язок, $a_1 > b_1$, тоді пара $(a_2, b_2) = (3a_1 - b_1, a_1)$ – також розв'язок, $3a_1 - b_1 > a_1$, а сума компонент зросла: $(3a_1 - b_1) + a_1 > a_1 + b_1$. Отже, не існує розв'язку з максимальною сумою компонент, а значить, розв'язків нескінченна кількість.

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. На шаховій дошці (8×8) розташовано декілька фішок, у кожній клітинці стоїть одна фішка або не стоїть жодної. За один хід одна з фішок зсовується на сусідню вздовж сторони клітину, якщо на тій немає фішки. Після декількох ходів виявилось, що кожна фішка побувала на кожному полі шахової дошки рівно по одному разу та повернулася на своє початкове поле. Доведіть, що був момент, коли жодна фішка не стояла на своєму початковому полі.

Розв'язання. Розглянемо момент, коли перша з фішок повертається у свою початкову клітину. Тоді за хід до цього моменту і є ситуація, коли кожна з фішок не стоїть на своїй позиції. Дійсно, на кожне поле фішка попадає рівно 1 раз, але перед поверненням у своє початкове поле перша фішка побувала на усіх полях, тобто кожна фішка вже покинула своє початкове поле. Це й завершує доведення твердження.

Залишилося зауважити, що умова задачі несуперечлива. Наприклад, на дошці могли стояти дві фішки одна біля одної та ходити по черзі: друга фішка ходить за першою і обидві йдуть уздовж «траєкторії», яка проходить через кожне поле один раз та в якій початкові поля, на яких стояли фішки, йдуть поспіль.

Математичний бій № 3

Середня ліга

Група А

Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "В"

2. Задача № 2 старша ліга група "А"

3. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ всі сторони рівні, а $\angle BCD = 2\angle ACE$. Знайдіть величину кута ACE.

Відповідь: $30°$.

Розв'язання. Побудуємо трикутник CDF рівний трикутнику ABC як це показано на рис. 15. Тоді $\angle ACE = \angle FCE$. Оскільки $AC = CF$, то у рівнобедреному $\triangle ACF$ відрізок CE – бісектриса, а тому також висота й медіана, тобто $\triangle AEF$ також рівнобедрений, звідки $EF = AE = AB = BC = CD = DF = DE$, тобто трикутник EDF – рівносторонній.

Таким чином $\angle EDF = 60°$. Якщо розглянути коло з центром у точці D і радіусом DE, то за побудовою на цьому колі будуть лежати точки C, E, F. Звідси

$$\angle ACE = \angle FCE = \frac{1}{2}\angle EDF = 30°.$$

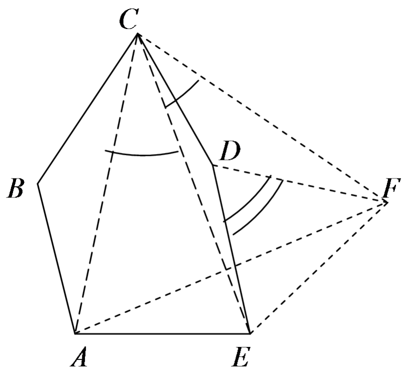


Рис.15

4. Задача № 4 старша ліга група "А"

5. Задача № 5 старша ліга група "А"

6. Задача № 6 старша ліга група "А"

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. Задача № 8 старша ліга група "В"

Математичний бій № 3
Середня ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Задача № 1 старша ліга група "В"

2. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких число $n^8 + n + 1$ є простим.
Відповідь: $n = 1$.
Розв'язання. Якщо поділити у стовпчик n^8+n+1 на n^2+n+1, то одержимо рівність:

$$n^8 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^6 - n^5 + n^3 - n^2 + 1),$$

з якої випливає, що у цього виразу є принаймні два дільники. Дуже просто переконатись, що при $n > 1$ вони обидва більші від 1, тому це число не може бути простим. При $n = 1$ вираз дорівнює 3 – просте число.

3. Задача № 3 середня ліга група "А"

4. Задача № 4 старша ліга група "В"

5. Задача № 5 старша ліга група "Б"

6. Для яких натуральних n вираз $2^n - n^2$ ділиться на 7?
Відповідь: Для усіх n, які при діленні на 21 дають остачу 2, 4, 5, 6, 10 або 15.
Розв'язання. Остачі при діленні 2^n на 7 мають цикл 3, а остачі числа n^2 мають цикл 7, тому треба усі натуральні числа розглянути за модулем 21. Дійсно:

$$2^{n+21} - (n+21)^2 \equiv 2^n \cdot 8^7 - (441 + 42n + n^2) \equiv 2^n - n^2 \pmod 7.$$

Далі просто перебираємо перші 21 натуральне число і знаходимо, що коли $n \equiv m \pmod{21}$, де $m \in \{2, 4, 5, 6, 10, 15\}$, вираз ділиться на 7, при інших – ні.

7. Задача № 7 старша ліга група "Б"

8. Задача № 8 старша ліга група "В"

Математичний бій № 3
Молодша ліга
Група А
Умови та розв'язки

1. Відомо, що для деяких дійсних a, b, c виконуються рівності: $a + b + c = 11$ та $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{19}{40}$. Знайдіть значення виразу $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$.

Відповідь: $\frac{89}{40}$.

Розв'язання. Перемножимо задані два вирази:

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=\frac{209}{40}.$$

Звідси ми маємо

$$1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}=\frac{209}{40},$$
$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{89}{40}.$$

Зауважимо, що числа, які задовольняють умову, існують. Наприклад, це трійка $a=1, b=3, c=7$.

2. Задача № 2 середня ліга група "Б"

3. У гострокутному трикутнику ABC провели висоту AH, медіану BM та бісектрису CK, які попарно перетинаються в трьох різних точках L, N, P. Доведіть, що $\triangle LNP$ не може бути рівностороннім.

Розв'язання. Нехай AH та BM перетинаються в точці N, BM та CK – в точці P, а CK та AH – у точці L. Можливі два розташування: точка L лежить між точками A та N (рис.) або точка N лежить між точками A та L.

Доведемо твердження задачі методом від супротивного. Припустимо, що $\triangle LNP$ є правильним. Тоді маємо такі кути: $\angle BNH = \angle ANM = \angle HLC = \angle KLA = \angle MPC = \angle BPK = 60°$.

Розглянемо розташування, при якому очка L лежить між точками A та N. $\angle HNP = \angle NPC = 120°$, $\angle NHC = 90°$, тому з чотирикутника $HNPC$ маємо, що $\angle HCP = 30°$, оскільки CK – бісектриса, то $\angle PCM = 30°$. Тому $\angle CMB = 90°$. Звідси випливає, що BM – висота, а одночасно й медіана, тому $\triangle ABC$ – рівнобедрений, у якому один з кутів $60°$, а тому всі три кути мають дорівнювати по $60°$, тобто цей трикутник правильний, а тому усі три точки L, N, P збігаються. Отже, таке розташування неможливе.

Нехай тепер точка N лежить між точками A та L. Тоді з $\triangle HLC$ маємо, що $\angle HCL = 30°$. Тоді й $\angle KCA = 30°$, бо CK – бісектриса. Тоді з $\triangle CPM$ $\angle CMP = \angle CMB = 90°$. Далі з тих самих міркувань, що в попередньому абзаці, отримуємо, що й таке розташування неможливе.

Одержали суперечність.

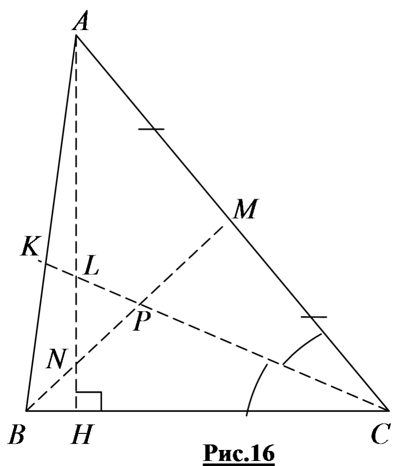


Рис.16

4. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло. З точки E, яка є серединою сторони BC, проведено перпендикуляр до прямої BC, який перетинає пряму AB в точці X, та перпендикуляр до прямої AD, який перетинає пряму CD в точці Y. Відомо, що точки B, A, X і точки C, D, Y лежать на прямих AB та CD саме в такому порядку, а $X \neq Y$. Доведіть, що прямі CD та XY перпендикулярні.

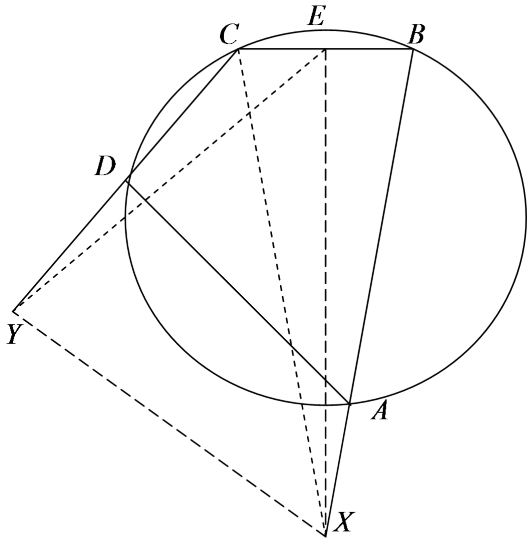


Рис.18

Розв'язання. З того, що $ABCD$ вписаний, випливає, що $\angle CBA = \angle YDA = \beta$. Оскільки XE – висота і медіана, то вона й бісектриса, тому $\angle EXB = \angle EXC = \alpha$. Тоді з прямокутного $\triangle BEX$ випливає, що $\alpha + \beta = 90°$. Оскільки $\angle DYE + \angle YDA = \angle DYE + \beta = 90°$, то $\angle DYE = \alpha$, тому чотирикутник $XYCE$ (або, при іншому розташуванні точок, $YXCE$) – вписаний. Звідси $\angle CYX + \angle CEX = 180°$ (або $\angle CYX = \angle CEX$), тому $\angle CYX = 90°$, що й треба було довести.

5. Знайти всі прості числа p, q, r, для яких справджується рівність:

$$p + q = (p - q)^r.$$

Відповідь: $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо випадок $r = 2$.

$p + q = p^2 - 2pq + q^2$, очевидно, що випадок $p = q$ умови не задовольняє. Інакше $p^2 - p = q + 2pq - q^2$ звідки випливає, що $p(p-1)$ кратне q, оскільки це прості числа, маємо, що $(p-1)\vdots q$, оскільки остання рівність симетрична для p, q так само повинно виконуватись $(q-1)\vdots p$, звідки приходимо до суперечності.

При $r \geq 3$ – це число непарне, тому справа піднесення до непарного степеня, звідки повинна виконуватись умова $p > q$. Тоді $(p + q)\vdots(p - q) \Rightarrow (p + q) - (p - q) = 2q\vdots(p - q)$. Оскільки число q – просте, то число $2q$ може мати лише такі дільники: $1, 2, q, 2q$. Таким чином, можливі 4 випадки:

1) $p - q = 1 \Rightarrow p + q = 1$ – суперечність.
2) $p - q = q \Rightarrow p = 2q$ – суперечність, бо p – просте.
3) $p - q = 2q \Rightarrow p = 3q$ – суперечність.
4) $p - q = 2 \Rightarrow p = q + 2$, маємо рівняння $(q + 2) + q = 2^r \Rightarrow q + 1 = 2^{r-1}$, оскільки r – непарне, то $r - 1 = 2l \Rightarrow q = 2^{2l} - 1 = 4^l - 1\vdots 3 \Rightarrow q = 3, p = 5, l = 1, r = 3$.

Підставивши, отримаємо, що трійка $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$ справді задовольняє умову.

6. Задача № 6 середня ліга група "Б"

7. Чи можна розташувати на площині 7 точок так, щоб вони мали властивість: якщо з цих семи точок вибрати довільні три, то принаймні дві з них будуть на відстані 1 одна від іншої?

Відповідь: Так.

Розв'язання. Достатньо розмістити точки, як це показано на рисунку. Спочатку будуємо ромб $ABDC$, який складається з двох правильних трикутників зі стороною 1, а далі додаємо його копію, повернуту відносно точки A на такий кут, щоб $FD = 1$.

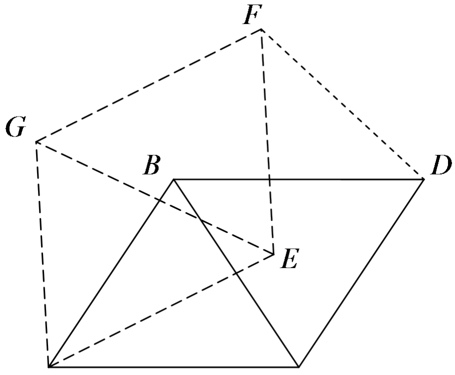


Рис.7

8. Задача № 8 старша ліга група "В"

Математичний бій № 3
Молодша ліга
Група Б
Умови та розв'язки

1. Задача № 1 молодша ліга група "А"

2. Додатні числа $a \le b \le c$ задовольняють умови: $abc = 1$ та $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Знайдіть значення b.

Відповідь: $b = 1$.

Розв'язання. З другої рівності одержимо, що $a+b+c = ab+bc+ca$, а тепер розглянемо такий вираз:

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1 = 0.$$

Таким чином, принаймні одне із значень a, b або c дорівнює 1. Але тоді це обов'язково середнє значення. Бо якщо $1 = a < b \le c$, то $abc > 1$ – суперечність, так само до суперечності призводить інша можливість: $a \le b < c = 1$, звідки й маємо, що $b = 1$.

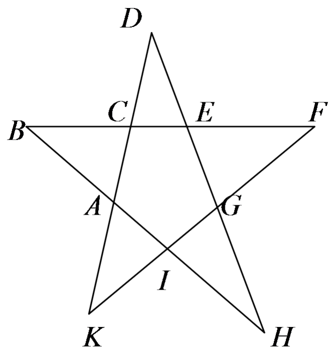


Рис.17

3. Задача № 3 молодша ліга група "А"

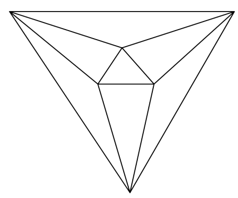
4. Чи можна нарисувати зірку $ABCDEFGHIK$ (див. рис.17) таким чином, щоби справджувалися умови:

$$AB < BC, CD < DE, EF < FG, GH < HI, IK < KA?$$

Відповідь: Не можна.

Розв'язання. Нехай таку зірку можливо побудувати. Зробимо це. Тепер послідовно будемо використовувати рівність вертикальних кутів та той факт, що проти більшого кута у трикутнику лежить більша сторона. Таким чином, маємо:

$$\angle KAI = \angle BAC > \angle BCA = \angle DCE,$$
$$\angle BCA = \angle DCE > \angle DEC = \angle FEG,$$
$$\angle DEC = \angle FEG > \angle EGF = \angle HGI,$$
$$\angle EGF = \angle HGI > \angle HIG = \angle KIA,$$
$$\angle HIG = \angle KIA > \angle KAI = \angle BAC.$$



Цей ланцюг вказує на суперечність.

5. Задача № 5 молодша ліга група "А"

6. Задача № 6 середня ліга група "Б"

7. Задача № 7 молодша ліга група "А"

8. У селі 6 хат, між якими є маленькі доріжки, як це показано на рисунку. По кожній з цих доріжок дозволено рухатись лише в одному напрямі. Чи можна так установити напрямок руху по доріжках, щоб із будь-якої хати до будь-якої іншої хати можна було дістатись, пройшовши у заданому напрямі не більше ніж по двох доріжках?

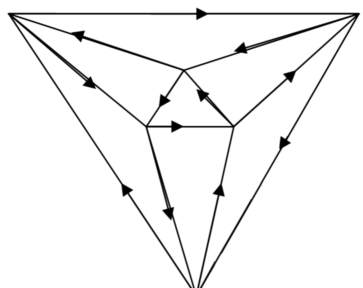


Рис.9

Відповідь: Можна.

Розв'язання. Можливий спосіб показано на рис. 9.