IX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Математична карусель

Умови задач

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. Кожну область на рис. 1 фарбують одним із чотирьох кольорів: червоним (**Ч**), зеленим (**З**), жовтим (**Ж**) чи синім (**С**). При цьому дві області, що мають спільний відрізок межі, не можна фарбувати в один і той самий колір. За умови, що центральні області пофарбовано так, як це показано на рисунку, в який колір може бути пофарбовано крайню праву область?

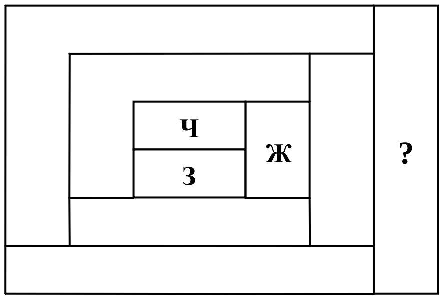

Рис. 1

2. Назвімо десятицифрове число, яке містить усі цифри від 0 до 9, розкішним. Якому найменшому натуральному числу може дорівнювати різниця двох розкішних чисел?

3. Лічильник автомобіля показує, що машина пройшла 24 942 км. Це число є паліндромом, тобто не зміниться, якщо його цифри переставити у зворотному порядку. Скільки ще треба проїхати автомобілю, щоб лічильник показав наступне за величиною число-паліндром?

4. Знайдіть величину кута x на рис. 2.

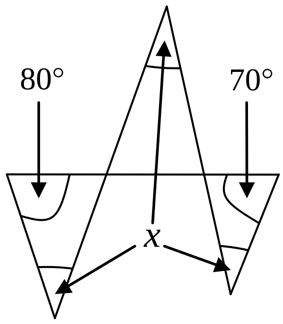

Рис. 2

5. «Динамо» зіграло 6 матчів у Лізі чемпіонів: 1 матч команда виграла, 2 звела внічию і 3 програла. Загалом в усіх іграх динамівці забили 5 голів і пропустили 3. З яким рахунком міг завершитися матч, в якому «Динамо» перемогло?

6. a, b, c, d — послідовні цифри, що йдуть у порядку зростання. Чому може дорівнювати d, якщо справджується рівність $\overline{ab} : c = d$?

7. Якщо приписати праворуч від трицифрового числа x трицифрове число y, то одержане шестицифрове число буде в 7 разів більше від добутку xy. Знайдіть число y.

8. Квадрат розрізали на шість прямокутників, як показано на рис. 3. Відомо, що сума периметрів цих шести прямокутників дорівнює 120. Чому дорівнює площа квадрата?

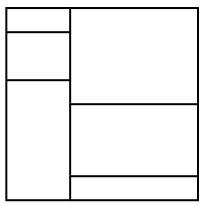

Рис. 3

9. На клітчастому аркуші нарисовано прямокутник 100×200 (на 100 рядків і 200 стовпчиків). Клітини прямокутника поступово зафарбовують: починають з лівої верхньої клітини та йдуть уздовж спіралі за годинниковою стрілкою, як це показано на рис. 4: дійшовши до краю по ще не зафарбованих клітинах, кожного разу повертають направо. Яку клітину прямокутника буде зафарбовано останньою? У відповіді треба вказати спершу номер рядка, а потім номер стовпчика шуканої клітини. Наприклад, якби це була права нижня клітинка, як відповідь слід було би подати пару чисел (100, 200).

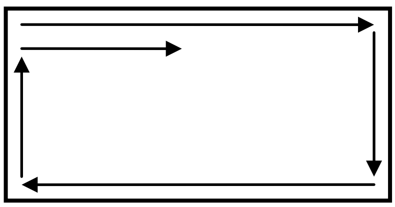

Рис. 4

10. Знайдіть хоча б одну трійку цілих чисел (x, y, z), які задовольняють рівність

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

11. Різні числа x та y задовольняють умову $x^4 - 2012x = y^4 - 2012y$. Чому може дорівнювати значення виразу $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$?

12. ABC — рівносторонній трикутник; усередині відрізка BC відмічено точки K та L такі, що $BK = KL = LC$, а на стороні AC трикутника позначено точку M, для якої $2AM = MC$. Знайдіть суму кутів $\angle AKM + \angle ALM$.

13. На дошці записано п’ять слів: «ЗАНОЗА», «КАЗИНО», «КЕФАЛЬ», «ЗАРАЗА», «ШЕЛЕСТ». За один крок можна витерти довільну одну букву будь-якого слова та замість неї вписати іншу, навіть якщо після цього слово не матиме змісту. Наприклад, за один крок зі слова «ЗАНОЗА» можна утворити слово «ЗКНОЗА». Яка найменша сумарна кількість кроків потрібна для того, щоб усі слова, записані на дошці, стали однаковими?

14. Знайдіть усі пари простих чисел (p, q), які задовольняють рівність

$$p + q = (p - q)^3.$$

15. На дошці записані два числа 1 та 2012. Кожного дня, починаючи з 1 вересня, Петрик витирає з дошки числа, які на ній були, а натомість записує середнє арифметичне та середнє гармонічне цих чисел. Знайдіть добуток двох чисел, які будуть записані на дошці ввечері 30 вересня.

Нагадаємо, що середнім арифметичним двох додатних чисел a і b називають число $\frac{a+b}{2}$, а середнім гармонічним — число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

16. Знайдіть величину кута x з умов, заданих на рис. 5.

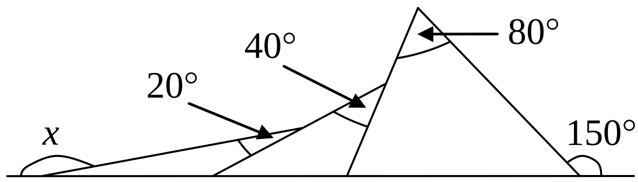

Рис. 5

17. Укажіть приклад набору з 4 гир, за допомогою якого можна зважити будь-яку цілу кількість грамів від 1 до 40 за умови, що гирі дозволено класти на обидві шальки терезів.

18. Знайдіть усі трійки послідовних простих чисел, сума квадратів яких є простим числом.

19. Знайдіть яку-небудь четвірку попарно різних натуральних чисел a, b, c, d, для яких і $a^2 + 2cd + b^2$, і $c^2 + 2ab + d^2$ є квадратами цілих чисел.

20. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$. Прямі BA та CD перетинаються в точці E, а прямі BC та AD — в точці F. Відомо, що $BE = BF$ і $\angle DEF = 25°$. Яких значень може набувати величина кута $\angle EFD$?

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. З 16 маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною 1 склали великий трикутник, як це показано на рис. 6. Скільки ромбів зі стороною 1 утворилося на рисунку?

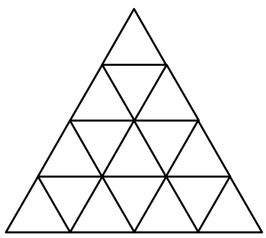
Рис. 6

2. Знайдіть усі натуральні числа, більші від 1, у разі ділення на які числа 1020 і 1127 дають однакові остачі.

3. У кожній комірці таблиці 3×3 записане деяке число, причому в кожній комірці, у якої є сусідня комірка зліва, записане число, вдвічі більше за те, яке записане в сусідній комірці зліва, а в кожній комірці, у якої є сусідня комірка зверху, записане число, втричі більше за те, яке записане в сусідній комірці зверху. Відомо, що сума всіх дев'яти чисел дорівнює 182. Яке число може бути записане в центральній комірці таблиці?

4. Усі кути опуклого чотирикутника попарно різні та кратні $30°$. Знайдіть величини цих кутів.

5. На рис. 7 зображено рибальську сітку. У ній послідовно розрізають ланки (відрізки) між сусідніми вузлами (точками на перетині відрізків). Яку найбільшу кількість ланок можна розрізати, щоб сітка не розпалася на кілька частин?

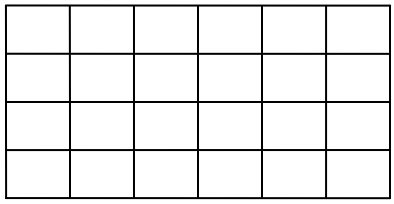

Рис. 7

6. Знайдіть найбільше число *a*, що є меншим від 100 й задовольняє таку умову: для довільного натурального *n* число $an(n+2)(n+4)$ теж є натуральним.

7. Петрик задумав три додатних числа, не всі з яких рівні. Потім для кожного з чисел він записав на аркуші суму цього числа та квадратів двох інших чисел. Усі три записаних суми виявилися однаковими. Наведіть приклад трьох чисел, які міг задумати Петрик.

8. Відрізок A_0A_1 дорівнює медіані AA_0 трикутника *ABC*, перпендикулярний до сторони *BC* й розташований зовні трикутника. Аналогічно визначимо точки B_1 і C_1. Знайдіть величину найменшого кута $\Delta A_1B_1C_1$, якщо відомо, що кути ΔABC дорівнюють $30°$, $30°$ і $120°$.

9. На острові живуть 200 аборигенів: 100 лицарів, які кажуть виключно правду, і 100 брехунів, які завжди брешуть. У кожного з жителів острова є хоча б один друг. Якось 100 мешканців острова водночас промовили: «Кожен мій друг — лицар». У цей же момент інші 100 жителів сказали: «Кожен мій друг — брехун». Яка найменша кількість пар, що складаються з лицаря й брехуна, що дружать між собою, може бути на острові? Один і той самий абориген може входити до кількох різних пар.

10. У натуральному числі *A* переставили цифри і, не ставлячи на перше місце цифру 0, дістали число *B*. Відомо, що

$$A - B = \underbrace{11...1}_{N}.$$

Знайдіть найменшу можливу кількість *N* одиниць у такій різниці.

11. Яка найменша кількість дітей може відвідувати математичний гурток, якщо відомо, що дівчат у гуртку більше ніж 40 %, але менше від 50 %?

12. У прямокутному трикутнику *ABC* з прямим кутом *C* на стороні *AC* знайшлася така точка *D*, а на відрізку *BD* — така точка *K*, що $\angle AKD = \angle KAD = \angle ABC$. Знайдіть відношення $\frac{CD}{BK}$.

13. Петрик задумав натуральне число і для кожної пари цифр числа записав на дошці їхню різницю. Потім хлопець витер декілька записаних різниць, і на дошці залишились два нулі, двійка та сімка. Яке найменше число міг задумати Петрик?

14. Для числа $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ знайдіть хоча б один натуральний дільник, відмінний від одиниці й самого числа.

15. По боках дошки записано дві одиниці. Петрик кілька разів повторює таку операцію: між кожними двома сусідніми числами, записаними на дошці, хлопець записує ще одне число — їхню суму. Наприклад, після першої операції на дошці буде записано три числа 1, 2, 1, а після другої — п'ять чисел 1, 3, 2, 3, 1. Знайдіть суму чисел, які будуть записані на дошці після десяти таких операцій.

16. Попарні відстані між трьома точками *A*, *B*, *C* задовольняють співвідношення $0 < AB < AC < BC = 1$. Якого найменшого значення може набувати сума цих трьох відстаней?

17. Уздовж дороги довжиною 1 км стоять ліхтарі. Кожен ліхтар освітлює відрізок дороги завдовжки рівно 1 м включно з його кінцями. Уся дорога освітлена ліхтарями, але якщо вимкнути довільний ліхтар, певна ділянка дороги (метрова або меншої довжини) перестане освітлюватися. Яка найбільша кількість ліхтарів може стояти вздовж дороги?

18. Знайдіть усі натуральні *n*, $2000 \leqslant n \leqslant 2012$, для яких число $n \cdot 2^n + 1$ кратне 3.

19. Відомо, що $c \neq 0$ і що для довільного *x* має місце рівність

$$|4x + a| + |bx + 503| = |cx + d|.$$

Чому може дорівнювати добуток *ab*?

20. На яку найбільшу кількість частин можуть розбити площину 5 відрізків?

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. Знайдіть найбільше натуральне *k* таке, що можна вибрати *k* різних підмножин деякої 2012-елементної множини, щоб будь-які дві з цих підмножин мали непорожній перетин.

2. *Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.*

3. Знайдіть усі значення *x*, при яких для довільного *y* існує число *z* таке, що справджується рівність $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

4. *Задача № 4 вихідного рубежу молодшої ліги.*

5. Петрик має в банку рахунок на 500 гривень. Банк дозволяє Петрику робити з рахунком такі дві операції: або зняти 300 гривень, якщо на рахунку є принаймні 300 гривень, або повторно вкласти 198 гривень за умови, що після цього сума на рахунку не перевищить 500 гривень. Яку максимальну суму хлопець зможе зняти з рахунку за допомогою цих двох операцій?

6. На дошці було записано число 8^{101}. Потім це число витерли, а замість нього записали суму його цифр. Далі витерли це нове число і замість нього записали вже суму його цифр і т. д. Таку операцію повторювали доти, доки на дошці не залишилось одноцифрове число. Що це за число?

7. *Задача № 7 вихідного рубежу молодшої ліги.*

8. На яку максимальну величину може збільшитися довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, якщо обидва його катети подовжити на 1 см?

9. *Задача № 9 вихідного рубежу молодшої ліги.*

10. *Задача № 10 вихідного рубежу молодшої ліги.*

11. Суму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2011}{2012!}$ записали як нескоротний дріб із натуральними чисельником та знаменником. Знайдіть три останні цифри чисельника цього дробу.

12. *Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.*

13. У футбольному чемпіонаті в одне коло, де за перемогу дають 3 очки, за нічию — 1 очко, а за поразку очок не дають, брали участь 5 команд. Унаслідок певних проблем чемпіонат був закінчений передчасно, і деякі пари команд не встигли зіграти між собою. Підсумки підвели за результатами матчів, які встигли зіграти. Виявилось, що всі команди набрали різну кількість очок, крім того, кожна команда набрала бодай одне очко. Яку найменшу кількість ігор могли провести на турнірі?

14. *Задача № 14 вихідного рубежу молодшої ліги.*

15. Знайдіть усі значення параметра a, за яких многочлени $x^4 + ax^2 + 1$ та $x^2 + ax + 1$ мають принаймні один спільний корінь.

16. *Задача № 16 вихідного рубежу молодшої ліги.*

17. *Задача № 17 вихідного рубежу молодшої ліги.*

18. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких сума цифр числа 5^n дорівнює 2^n.

19. *Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.*

20. Точка I — інцентр трикутника ABC. Позначмо через A_1, B_1 і C_1 точки, що симетричні до точки I відносно сторін трикутника. Знайдіть величину кута при вершині B трикутника, якщо відомо, що через цю вершину проходить коло, описане навколо $\Delta A_1B_1C_1$.

Середня ліга. Заліковий рубіж

1. *Задача № 1 залікового рубежу молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 залікового рубежу молодшої ліги.*

3. Квадратний тричлен $f(x) = x^2 + ax + b$ задовольняє умову: для довільного числа x знайдеться таке число y, що $f(y) = f(x) + y$. Вкажіть усі можливі значення параметра a.

4. На площині нарисовано відрізок AB довжини 4. Скільки є різних точок C, таких що трикутник ABC прямокутний і має площу 2?

5. *Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 залікового рубежу молодшої ліги.*

7. Петрик задумав три додатних числа, потім для кожного з чисел він записав на аркуші суму цього числа та квадратів двох інших чисел. Усі три записаних суми виявилися однаковими. Які числа міг задумати Петрик? Знайдіть усі можливі трійки.

8. Нехай ω — коло радіуса 1, що містить усередині точку A. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що існує прямокутник $ABCD$, вершини B і D якого лежать на колі ω.

9. *Задача № 9 залікового рубежу молодшої ліги.*

10. *Задача № 10 залікового рубежу молодшої ліги.*

11. *Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.*

12. Точка O лежить усередині ромба $ABCD$, причому $\angle BAD = 110°$, $\angle AOD = 80°$, а $\angle BOC = 100°$. Чому може дорівнювати величина кута AOB?

13. *Задача № 13 залікового рубежу молодшої ліги.*

14. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел (x, y), що числа $x^3 + y$ та $x + y^3$ діляться на $x^2 + y^2$.

15. *Задача № 15 залікового рубежу молодшої ліги.*

16. У ромбі $ABCD$ $\angle CBD = 40°$, E — середина BC, F — основа перпендикуляра, що опущений із точки A на DE. Знайдіть величину кута CFD.

17. *Задача № 17 залікового рубежу молодшої ліги.*

18. Розв'яжіть у натуральних числах (a, b, c, d) систему рівнянь $\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$

19. *Задача № 19 залікового рубежу молодшої ліги.*

20. *Задача № 20 залікового рубежу молодшої ліги.*

Старша ліга. Вихідний рубіж

1. *Задача № 1 вихідного рубежу середньої ліги.*

2. Знайдіть найменше натуральне n, для якого число $1\underbrace{22...2}_{n}1$ (n двійок) ділиться на число 999 999 999 (дев'ять дев'яток).

3. *Задача № 3 вихідного рубежу середньої ліги.*

4. Знайдіть різницю між кількістю ребер та кількістю граней зрізаної 2012-кутної піраміди.

5. *Задача № 5 вихідного рубежу середньої ліги.*

6. *Задача № 6 вихідного рубежу середньої ліги.*

7. Нехай $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Розв'яжіть у дійсних числах рівняння

$$f\Big(f\Big(f\Big(f\Big(f(x)\Big)\Big)\Big)\Big) = 0.$$

8. *Задача № 8 вихідного рубежу середньої ліги.*

9. Для кожної впорядкованої пари дійсних чисел (x, y) визначили деяке дійсне число $x * y$. При цьому для довільних x, y і z справджуються рівності $x * x = 0$ та $x*(y*z) = (x*y)+z$. Чому може дорівнювати $2012*1964$?

10. Розв'яжіть у цілих числах (x, y) рівняння $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

11. *Задача № 11 вихідного рубежу середньої ліги.*

12. *Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.*

13. *Задача № 13 вихідного рубежу середньої ліги.*

14. Розв'яжіть у цілих числах (x, y, z) систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^3 = 7z^4, \\ z^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

15. *Задача № 15 вихідного рубежу середньої ліги.*

16. Якою найменшою кількістю кругів радіуса 1 можна повністю покрити круг радіуса 2? Точки на границі круга також належать кругу.

17. У яку найбільшу кількість кольорів можна розфарбувати всі комірки таблиці 10×10 (одна комірка фарбується в один колір) таким чином, щоб у кожному рядку та в кожному стовпчику містилися комірки щонайбільше 5 різних кольорів?

18. *Задача № 18 вихідного рубежу середньої ліги.*

19. Відомо, чому дорівнює $\sin\alpha$. Якої найбільшої кількості значень може набувати число $\sin\dfrac{\alpha}{2}$?

20. *Задача № 20 вихідного рубежу середньої ліги.*

Старша ліга. Заліковий рубіж

1. З маленьких рівносторонніх трикутників із довжиною сторони 1 склали великий трикутник зі стороною 2012, як це показано на рис. 8. Скільки ромбів зі стороною 1 утворилося на рисунку?

2. Цілі числа m та n взаємно прості. Якого максимального значення може набути найбільший спільний дільник чисел $m + 2000n$ і $n + 2000m$?

3. *Задача № 3 залікового рубежу середньої ліги.*

4. *Задача № 4 залікового рубежу середньої ліги.*

5. *Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.*
6. *Задача № 6 залікового рубежу молодшої ліги.*
7. *Задача № 7 залікового рубежу середньої ліги.*
8. *Задача № 8 залікового рубежу середньої ліги.*
9. *Задача № 9 залікового рубежу молодшої ліги.*
10. *Задача № 10 залікового рубежу молодшої ліги.*
11. Яку найбільшу довжину n може мати арифметична прогресія натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ з різницею 2, така що для довільного k, $1 \leqslant k \leqslant n$, число $a_k^2 + 1$ просте?

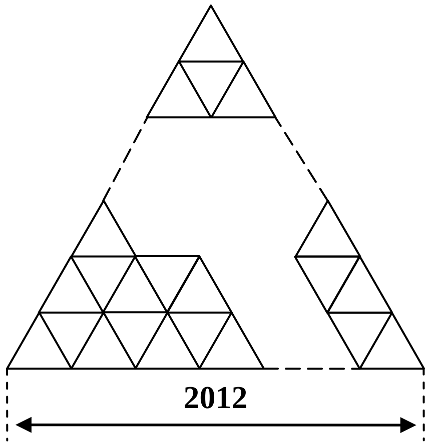

Рис. 8

12. *Задача № 12 залікового рубежу середньої ліги.*
13. *Задача № 13 залікового рубежу молодшої ліги.*
14. *Задача № 14 залікового рубежу середньої ліги.*
15. Знайдіть величини таких кутів α з проміжку $[0°, 180°]$, для яких набори чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ і $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ збігаються, тобто одна трійка чисел є перестановкою іншої трійки.
16. *Задача № 16 залікового рубежу середньої ліги.*
17. *Задача № 17 залікового рубежу молодшої ліги.*
18. *Задача № 18 залікового рубежу середньої ліги.*
19. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ із дійсними коефіцієнтами, для яких справджуються умови: $P(0) = 0$, $P(1) = 2012$ і для довільного дійсного x

$$P(x) = \frac{1}{2}\left(P(x+1) + P(x-1)\right).$$

20. *Задача № 20 залікового рубежу молодшої ліги.*

Відповіді та розв'язання

Молодша ліга. Вихідний рубіж

1. ***Відповідь:*** у червоний колір (**Ч**).
Розв'язання. Послідовно визначаємо, в який колір має бути пофарбована кожна з областей, як це показано на рис. 9.

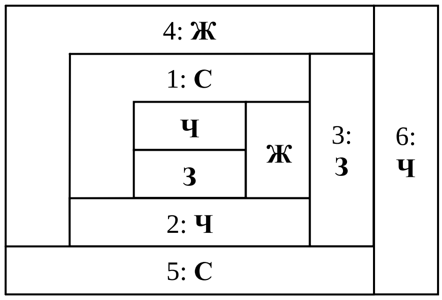

Рис. 9

2. ***Відповідь:*** 9.
Розв'язання. Сума цифр довільного розкішного числа дорівнює 45 і ділиться на 9, тож на 9 ділиться і саме розкішне число. Тому й різниця двох розкішних чисел має ділитися на 9, а отже не може бути меншою за 9. Число ж 9 справді може бути різницею двох таких чисел: $1023456798 - 1023456789 = 9$.

3. ***Відповідь:*** 110 км.
Розв'язання. Зрозуміло, що інших паліндромів, які починаються з цифр 249, немає. А паліндром, що починається на 250, є тільки один — це число 25 052. Відповідно автомобілю треба проїхати ще $25\,052 - 24\,942 = 110$ км.

4. ***Відповідь:*** $30°$.
Розв'язання. Позначмо через y та z інші невідомі кути — див. рис. 10. Маємо: $x + y = 180° - 80° = 100°$, $x + z = 180° - 70° = 110°$. Тоді $2x + y + z = 210°$, а оскільки $x + y + z = 180°$, то $x = 30°$. Слід також зауважити, що при $x = 30°$, $y = 70°$, $z = 80°$ відповідну геометричну конструкцію справді можна побудувати.

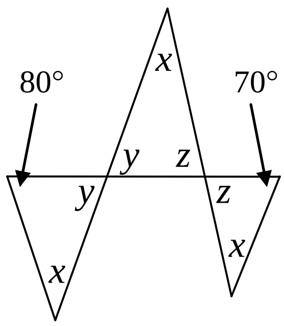

Рис. 10

5. ***Відповідь:*** 5:0.
Розв'язання. При поразці команда обов'язково пропускає принаймні 1 гол. А оскільки «Динамо» програло 3 гри, а пропустило лише 3 голи, то в кожній з цих ігор команда пропускала рівно по голу і, отже, не забивала жодного. Це означає, що й у двох матчах, які завершилися внічию, пропущених, а отже, й забитих голів не було. Таким чином, той матч, що залишився, динамівці виграли з рахунком 5:0.

6. ***Відповідь:*** 4 та 8.
Розв'язання. Проведемо простий перебір: вирази $12:3=4$ та $56:7=8$ правильні; вирази $23:4=5$, $34:5=6$, $45:6=7$, $67:8=9$ — ні.

7. ***Відповідь:*** 143.
Розв'язання. Запишімо умову у вигляді рівності: $1000x + y = 7xy$. З цієї рівності випливає, що $7y = 1000 + \frac{y}{x}$. Величина $\frac{y}{x}$, як відношення двох трицифрових чисел, може мати цілі значення від 1 до 9. Таким чином, $1001 \leqslant 7y \leqslant 1009$. У цьому проміжку є лише два числа, що кратні семи: 1001 і 1008.

У першому випадку $y = \frac{1001}{7} = 143$, $\frac{y}{x} = 1 \Rightarrow x = 143$ (і неважко переконатися, що числа $x = y = 143$ справді задовольняють умову).

У другому випадку $y = \frac{1008}{7} = 144$, $\frac{y}{x} = 8 \Rightarrow x = \frac{144}{8} = 18$ — не є трицифровим, а тому умову не задовольняє.

8. ***Відповідь:*** 144.
Розв'язання. При обчисленні сумарного периметра прямокутників кожен відрізок на межі квадрата враховується один раз, а кожен відрізок усередині квадрата додається двічі. Нехай сторона квадрата дорівнює a. Оскільки периметр квадрата складає $4a$, а сума довжин відрізків, що містяться всередині нього, — $3a$, сумарний периметр шести прямокутників має дорівнювати

$4a + 2 \cdot 3a = 10a = 120$, звідки $a = 12$, і площа квадрата — $a^2 = 144$.

9. ***<u>Відповідь:</u>*** (51, 50).

<u>Розв'язання.</u> Після першого «кола», зробленого уздовж спіралі, буде зафарбовано зовнішній шар клітин, а не зафарбованим залишиться прямокутник 98×198, причому на другому «колі» цей прямокутник, як і початковий, починають фарбувати з лівої верхньої клітинки. Після другого «кола» лишатиметься прямокутник 96×196, після третього — 94×194 і т. д. Зрештою дійдемо до прямокутника 2×102, розташованого в центрі дошки: у рядках 50 та 51 і стовпчиках 50—151 (рис. 11). Ліва нижня клітинка цього прямокутника і є шуканою.

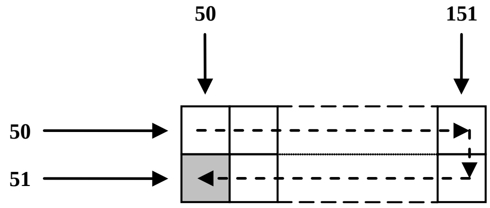

Рис. 11

10. ***<u>Відповідь:</u>*** розв'язків нескінченно багато; один із них — (1, 4, 7).

<u>Розв'язання.</u> Для знаходження розв'язку можна скористатися тим, що 365 — кількість днів у невисокосному році, а кожне з чисел 28, 30 і 31 є кількістю днів у певних його місяцях:

— 28 днів — лютий (один місяць, $x = 1$);

— 30 днів — квітень, червень, вересень, листопад (чотири місяці, $y = 4$);

— 31 день — січень, березень, травень, липень, серпень, жовтень, грудень (сім місяців, $z = 7$).

11. ***<u>Відповідь:</u>*** 2012.

<u>Розв'язання.</u> Перетворімо вираз:

$$x^4 - y^4 = 2012(x - y) \Rightarrow x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = 2012.$$

12. ***<u>Відповідь:</u>*** $30°$.

<u>Розв'язання.</u> З теореми, оберненої до теореми Фалеса, $MK \parallel AB$ (рис. 12), звідки випливає, що $\angle AKM = \angle KAB$. Крім того, з міркувань симетрії $\angle KAB = \angle LAC$, тож $\angle AKM = \angle LAC$. А тоді

$\angle AKM + \angle ALM = \angle LAC + \angle ALM = 180° - \angle AML = \angle LMC$.

Оскільки ΔMKC правильний (усі його кути дорівнюють $60°$), а ML — його медіана й бісектриса, $\angle LMC = 30°$.

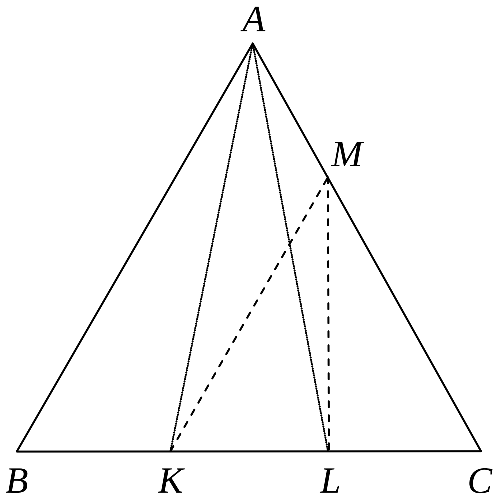

Рис. 12

13. ***<u>Відповідь:</u>*** 18.

<u>Розв'язання.</u> Запишімо всі слова одне під одним (рис. 13). Щоб зробити всі букви першого стовпця однаковими, нам потрібно здійснити щонайменше три кроки: або замінити кожну з літер «З», «З» і «Ш» на «К», або літери «К», «К» і «Ш» поміняти на «З». Щоб зробити однаковими всі букви другого стовпця, слід походити принаймні двічі (дві «Е» замінити на «А»), для третього стовпця — 4 рази (оскільки всі 5 літер у ньому різні), для четвертого, п'ятого і шостого стовпців — по 3 рази. Загалом, щоб усі слова стали однаковими, треба зробити щонайменше $3 + 2 + 4 + 3 + 3 + 3 = 18$ кроків.

З	А	Н	О	З	А
К	А	З	И	Н	О
К	Е	Ф	А	Л	Ь
З	А	Р	А	З	А
Ш	Е	Л	Е	С	Т

Рис. 13

14. ***<u>Відповідь:</u>*** (5, 3).

<u>Розв'язання.</u> Позначимо різницю $p - q$ через n. Тоді можемо записати, що $p + q = n^3$. Віднявши від цього рівняння рівність $p - q = n$ і поділивши на 2, дістанемо, що $q = \frac{n^3 - n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$. У чисельнику стоїть добуток трьох послідовних цілих чисел, який завжди кратний 3, отже й $q \vdots 3 \Rightarrow q = 3$. Тоді $n = 2$, а $p = q + n = 5$. Лишається переконатися, що пара чисел (5, 3) справді задовольняє умову задачі.

15. ***<u>Відповідь:</u>*** 2012.

<u>Розв'язання.</u> Передусім слід зауважити, що числа, які записує Петрик, завжди додатні. Легко показати, що добуток цих чисел не змінюється: якщо в певний момент на дошці було записано числа a і b і добуток дорівнював ab, то й наступного дня добуток складатиме

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{b+a}=ab.$$

Отже, 30-го дня ввечері добуток чисел буде таким самим, як і вранці першого дня, тобто дорівнюватиме 2012.

16. ***Відповідь:*** $170°$.

Розв'язання. Позначмо кути, як на рис. 14.

Послідовно знаходимо:

$\angle AHG=180°-\angle AHI=30°$,

$\angle AGH=180°-\angle GAH-\angle AHG=70°$,

$\angle BGF=180°-\angle AGH=110°$,

$\angle BFG=180°-\angle FBG-\angle BGF=30°$,

$\angle CFE=180°-\angle BFG=150°$,

$\angle CEF=180°-\angle ECF-\angle CFE=10°$,

$x=\angle CED=180°-\angle CEF=170°$.

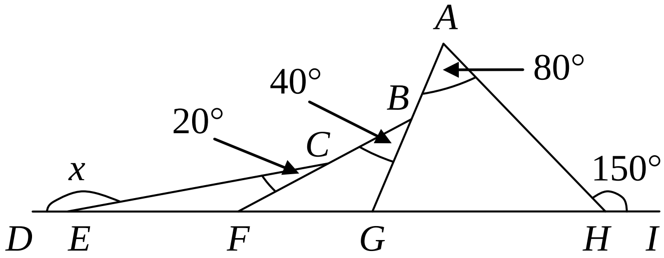

Рис. 14

17. ***Відповідь:*** 1, 3, 9, 27.

Розв'язання. Гирями 1 і 3 можна зважити будь-яку масу від 1 до 4 грамів. Додаючи гирю 9, ми отримуємо можливість зважувати від $9-4=5$ до $9+4=13$ грамів. Аналогічно, якщо додати 27-грамову гирю, зможемо важити маси від $27-13=14$ до $27+13=40$ грамів.

Не дуже складно показати, що інших варіантів набору, які задовольняли б умову задачі, не існує. Подану ж відповідь можна знайти з допомогою «жадібного» підходу: на кожному кроці брати гирю найбільшої ваги, яка дозволятиме зважити найменшу поки що незважувану кількість грамів.

18. ***Відповідь:*** є лише одна така трійка — 3, 5, 7.

Розв'язання. Якщо серед простих чисел немає числа 3, то квадрат кожного з них дає від ділення на 3 залишок 1, а тому сума трьох квадратів ділитиметься на 3 і, оскільки вона явно перевищує 3, не зможе бути простою. Таким чином, одне з простих чисел — 3. Залишається розглянути два можливих випадки:

- сума квадратів чисел 2, 3 та 5 дорівнює $4+9+25=38$ і не є простою;
- сума квадратів чисел 3, 5 і 7 дорівнює $9+25+49=83$ і справді є простою.

19. ***Відповідь:*** розв'язків нескінченно багато; один із них — $a=1$, $b=6$, $c=2$, $d=3$.

Розв'язання. Якщо, наприклад, підібрати значення a, b, c, d такі, щоб $ab=cd$, то будемо мати, що $a^2+2cd+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ і $c^2+2ab+d^2=c^2+2cd+d^2=(c+d)^2$.

20. ***Відповідь:*** $25°$.

Розв'язання. За умовою ΔEBF рівнобедрений і $\angle BEF=\angle BFE$ (рис. 15). Крім того, $\Delta EBC=\Delta FBA$ за двома сторонами і кутом між ними, звідки $\angle BEC=\angle BFA$. Тоді

$$\angle EFD=\angle BFE-\angle BFA=\angle BEF-\angle BEC=\angle DEF=25°.$$

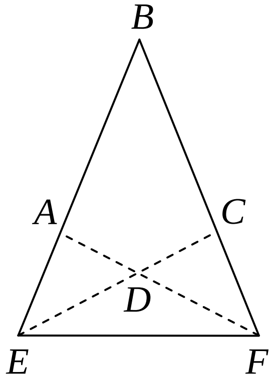

Рис. 15

Молодша ліга. Заліковий рубіж

1. ***Відповідь:*** 18.

Розв'язання. На рис. 16 показано три типи ромбів, наявні в трикутнику. Ромбів кожного з цих типів, з міркувань симетрії, однакова кількість. Підрахуємо, наприклад, кількість ромбів другого типу. Ромб такого типу, що розташовується в першому й другому рядках трикутника (див. рис. 17), є один; ромбів, що містяться в другому й

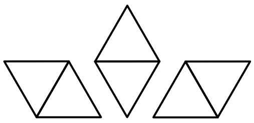
Рис. 16

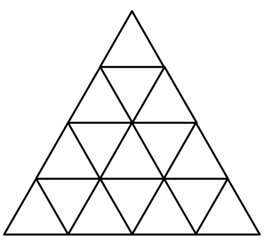
Рис. 17

третьому рядках трикутника, — два; нарешті, ромбів, які розміщуються в третьому й четвертому рядках, — три. Таким чином, ромбів одного типу маємо 6, а ромбів усіх трьох типів — 18.

2. ***<u>Відповідь:</u>*** 107.
***<u>Розв'язання</u>*.** Нехай a — одне з таких чисел, а q — остача від ділення на a чисел 1020 і 1127. Тоді $1020 = ab + q$ і $1127 = ac + q$ для деяких цілих b і c. Знайшовши різницю цих рівностей, матимемо $107 = (c - b)a$. Оскільки число 107 просте, а число a натуральне й більше від 1, $a = 107$. Неважко переконатися, що таке значення справді задовольняє умову.

3. ***<u>Відповідь:</u>*** 12.
***<u>Розв'язання</u>*.** Позначимо число у лівій верхній комірці через a. Тоді, виходячи з першої умови задачі, у верхньому рядку мають бути записані числа a, $2a$, $4a$. Тепер, виходячи з другої умови, в центральному рядку таблиці повинні стояти числа $3a$, $6a$ і $12a$, а в нижньому — $9a$, $18a$ і $36a$. Сума всіх чисел складає $91a = 182$, звідки $a = 2$. Отже, число в центральній комірці — $6a = 12$.

4. ***<u>Відповідь:</u>*** $30°$, $60°$, $120°$, $150°$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Нехай шукані кути дорівнюють у градусах $30a$, $30b$, $30c$ і $30d$, $a < b < c < d$. При цьому $a + b + c + d = 12$ (оскільки сума кутів чотирикутника завжди дорівнює $360°$), а також $d < 6$ (оскільки кут опуклого чотирикутника повинен бути меншим за $180°$). Залишається зробити простий перебір: із п'яти четвірок натуральних чисел, що задовольняють умову $a < b < c < d < 6$, суму 12 дає тільки четвірка $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 5$. Легко зрозуміти, що опуклий чотирикутник з відповідними кутами $30°$, $60°$, $120°$, $150°$ справді існує і задовольняє умову.

5. ***<u>Відповідь:</u>*** 24.
***<u>Розв'язання</u>*.** Розгляньмо конструкцію, що утвориться після розрізання найбільшої можливої кількості ланок. Конструкція має бути цілісною, тобто від кожного вузла можна буде дійти до кожного іншого її вузла по нерозрізаних ланках. Зафіксуймо деякий вузол A і для кожного іншого вузла розгляньмо першу нерозрізану ланку, по якій треба пройти з даного вузла, щоб за якнайменшу кількість кроків потрапити у вузол A. Легко зрозуміти, що для всіх вузлів такі ланки будуть різними: якби для вузлів B і C вибрана ланка була спільною, це означало б, що вона проходить якраз між B і C, але тоді або шлях із B в A, або шлях із C в A, який починається з цієї ланки, не був би найкоротшим — суперечність. Усього маємо 35 вузлів, тому після розрізань має залишитися щонайменше 34 цілі ланки (по одній для кожного вузла, крім фіксованого вузла A). Загальна кількість ланок складає $4 \cdot 7 + 6 \cdot 5 = 58$, тому розрізати ми можемо не більше ніж $58 - 34 = 24$ ланки. З іншого боку, цю кількість ланок справді можна розрізати, залишивши сітку суцільною — на рис. 18 наведено один із прикладів такого розрізання. Зауважимо, що після розрізань, показаних на рисунку, сітка перетворюється на ланцюг.

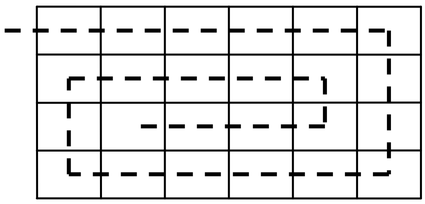
Рис. 18

6. ***<u>Відповідь:</u>*** $\frac{299}{3}$.

***<u>Розв'язання</u>*.** Покажемо, що наведену умову задовольняють числа вигляду $\frac{k}{3}$, $k \in \mathbb{N}$, і тільки вони.

По-перше, оскільки числа n, $n+2$ та $n+4$ дають попарно різні остачі від ділення на 3, одне з них має ділитися на 3, звідки випливає, що число $\frac{kn(n+2)(n+4)}{3}$ натуральне.

З іншого боку, підставимо у вираз $an(n+2)(n+4)$ значення $n = 1$ і $n = 2$: дістанемо, що числа $15a$ і $48a$ мають бути натуральними, але тоді й число $48a - 3 \cdot 15a = 3a$ також ціле. Тобто справджується співвідношення $a = \frac{k}{3}$ для деякого цілого (і, очевидно, натурального) k.

Лишається визначити найбільше число вигляду $\frac{k}{3}$, $k \in \mathbb{N}$, що є меншим від 100: це $\frac{299}{3}$.

7. ***<u>Відповідь:</u>*** розв'язків нескінченно багато, один із них — трійка чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.

<u>Розв'язання.</u> Нескладно безпосередньо перевірити, що наведена трійка чисел задовольняє умову задачі. Можливий шлях її пошуку див. у розв'язанні задачі № 7 залікового рубежу середньої ліги.

8. ***<u>Відповідь:</u>*** $60°$.

<u>Розв'язання.</u> Без утрати загальності вважатимемо, що кут $120°$ прилягає до вершини *B* (рис. 19). Оскільки ΔABC рівнобедрений, BB_0 — серединний перпендикуляр до основи *AC*. На прямій, що містить цей перпендикуляр, міститься й точка B_1. У трикутнику BAB_1 відрізок AB_0 — висота й медіана, тому $AB_1 = AB$ і $\angle B_1AB_0 = \angle BAB_0 = 30°$. Отже, $\angle BAB_1 = 60°$, а трикутник BAB_1 правильний. Це означає, що відрізок B_1C_0 — серединний перпендикуляр до сторони *AB*, причому на прямій, що містить цей перпендикуляр, лежить і точка C_1. Таким чином, $\angle BB_1C_1 = 30°$. Аналогічно доводиться, що $\angle BB_1A_1 = 30°$. А тоді $\angle A_1B_1C_1 = 60°$ і, враховуючи, що $B_1A_1 = B_1C_1$ (з міркувань симетрії), трикутник $A_1B_1C_1$ теж правильний. Отже, кожен його кут дорівнює $60°$.

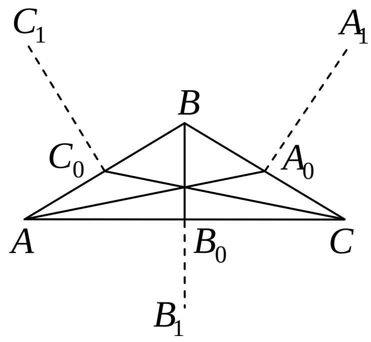

Рис. 19

9. ***<u>Відповідь:</u>*** 50.

<u>Розв'язання.</u> Меншою за 50 кількість таких пар бути не може. Справді, з-поміж тих 100 аборигенів, хто сказав, що всі їхні друзі — брехуни, є або хоча б 50 лицарів, або принаймні 50 брехунів. У першому випадку в кожного з 50 лицарів справді є хоча б по одному другу-брехуну, що утворюють із ними принаймні 50 пар. У другому випадку кожен з 50 брехунів має хоча б одного друга-лицаря, оскільки насправді не всі його друзі є брехунами. І тут маємо щонайменше 50 пар.
З іншого боку, кількість пар справді може дорівнювати 50. Такою вона буде, якщо, приміром, лицар 1 дружить із брехуном 1, лицар 2 дружить із брехуном 2, …, лицар 50 дружить із брехуном 50, лицарі 51—100 дружать між собою, брехуни 51—100 дружать між собою і більше ніхто ні з ким не дружить. У такому разі фразу «Кожен мій друг — брехун» скажуть перші 50 лицарів і перші 50 брехунів, а фразу «Кожен мій друг — лицар» — решта аборигенів.

10. ***<u>Відповідь:</u>*** 9.

<u>Розв'язання.</u> Спершу слід помітити, що $A - B \vdots 9$, оскільки суми цифр, а отже й залишки від ділення на 9, у чисел *A* і *B* однакові. Це означає, що меншою за 9 кількість одиниць бути не може. Залишається показати, що з дев'яти одиниць різниця складатися справді може. Це випливає з такого прикладу: $9\,012\,345\,678 - 8\,901\,234\,567 = 111\,111\,111$.

11. ***<u>Відповідь:</u>*** 7.

<u>Розв'язання.</u> Дещо переформулюймо умову: треба знайти найменшу можливу кількість *n* учасників гуртка таку, що існує натуральне *m* (кількість дівчат), для якого $\frac{2}{5} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$. Шляхом швидкого перебору нескладно встановити, що дріб із найменшим знаменником, який задовольняє ці нерівності, — це $\frac{3}{7}$, а *n*, відповідно, дорівнює 7.

12. ***<u>Відповідь:</u>*** $\frac{1}{2}$.

<u>Розв'язання.</u> Відкладімо на прямій *AC* точку *M* таку, що $CM = CD$ (рис. 20). За побудовою *BC* — серединний перпендикуляр до відрізка *DM*, тож $\Delta BCD = \Delta BCM$. Далі отримуємо такі співвідношення:

$$\angle BAK = 180° - \angle AKB - \angle ABK = \angle AKD - \angle ABK =$$
$$= \angle ABC - \angle ABK = \angle KBC = \angle MBC \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle BAM = \angle BAK + \angle KAD = \angle MBC + \angle ABC = \angle ABM.$$

Отже, ΔAMB рівнобедрений і $AM = BM$. Тоді

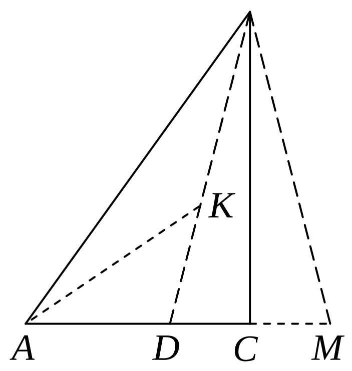

Рис. 20

$$BK = BD - KD = BM - KD = AM - KD = AM - AD = MD = 2CD,$$

звідки й випливає, що $\dfrac{CD}{BK} = \dfrac{1}{2}$.

Зауважимо, що конструкція, яка задовольняє умову задачі, існує: щоб побудувати приклад, достатньо довільним чином вибрати кут *B* трикутника в межах від 30° до 45° невключно, точку *D* позначити так, щоб $\angle BDA = 180^\circ - 2\angle ABC$, а точку *K* — щоб $\angle KAD = \angle ABC$.

13. ***Відповідь:*** 11 138.

Розв'язання. Те, що число 11 138 задовольняє умову задачі, очевидно. Покажемо, що менших чисел, які б міг задумати Петрик, нема.

Оскільки серед різниць є числа 2 та 7, число повинно мати щонайменше три різні цифри. А оскільки Петрик записав також і два нулі, серед цифр числа повинні бути або три рівні, або дві пари однакових. Значить, число має бути п'ятицифровим і містити саме три різні цифри. Щоби при цьому бути меншим за 11 138, число повинно містити одиницю (яка має стояти на першому місці). Але тоді двома іншими цифрами числа обов'язково мають бути або 3 і 8, або 6 і 8, і утворити число, менше за 11 138, не вдасться.

14. ***Відповідь:*** $2^9 + 3^{10} = 59\,561$.

Розв'язання. Перетворімо вираз: $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9)^2 + 2\cdot 2^9 \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2$. Зауважмо також, що число $2^9 + 3^{10}$ просте, тож воно є єдиною можливою відповіддю.

15. ***Відповідь:*** $3^{10} + 1 = 59\,050$.

Розв'язання. Якщо в деякий момент на дошці записано числа $(1,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ 1)$ із сумою $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 2$, то після наступної операції на дошці будуть числа

$$(1,\ 1 + a_1,\ a_1,\ a_1 + a_2,\ a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_{k-1} + a_k,\ a_k,\ a_k + 1,\ 1),$$

які дадуть суму $3a_1 + 3a_2 + \ldots + 3a_k + 4 = 3S - 2$. Тепер нескладно підрахувати відповідь безпосередньо або показати методом математичної індукції, що після *n* операцій сума чисел, записаних на дошці, дорівнює $3^n + 1$. Сума після десяти операцій складатиме $3^{10} + 1 = 59\,050$.

16. ***Відповідь:*** 2.

Розв'язання. З нерівності трикутника безпосередньо випливає, що $AB + AC \geqslant BC$. А це своєю чергою означає, що $AB + AC + BC \geqslant 2BC = 2$. З іншого боку, якщо точка *A* лежить на відрізку *BC*, причому ближче до точки *B*, ніж до *C*, умова задачі виконується, а сума попарних відстаней між точками дорівнює 2. Отже, саме це значення і є шуканим.

17. ***Відповідь:*** 1998.

Розв'язання. Занумеруємо ліхтарі зліва направо. Якби ділянки дороги, що освітлюються *n*-м та $(n+2)$-м ліхтарями, перетиналися, то $(n+1)$-й ліхтар можна було б вимкнути, що суперечило б умові задачі. Отже, освітлювані ділянки жодних двох ліхтарів із парними номерами та жодних двох ліхтарів з непарними номерами не перетинаються. Оскільки вздовж кілометрової дороги можна розставити щонайбільше 999 метрових відрізків, які попарно не перетинаються, загальна кількість освітлюваних ділянок, тобто ліхтарів, не перевищує $999 + 999 = 1998$.

Залишається навести приклад розташування 1998 ліхтарів, яке задовольняє умову задачі. Нехай дорога розташована на координатній осі і простягається від точки 0 до точки 1000. Розмістімо ліхтарі, тобто центри освітлюваних метрових ділянок, у таких точках:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{999}{1997},\ \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{999}{1997},\ \ldots,\ \frac{1}{2} + 1997\cdot\frac{999}{1997} = 999\frac{1}{2}.$$

Відстань між ліхтарями, що розташовані через один, дорівнює $\dfrac{1998}{1997} > 1$, а тому ліхтар між ними вимкнути дійсно не можна. Зрозуміло також і те, що не можна вимкнути перший та останній ліхтарі. Уся дорога при цьому справді освітлена.

18. ***Відповідь:*** 2000, 2005, 2006, 2011 та 2012.

Розв'язання. Остача від ділення на 3 числа 2^n повторюється, як нескладно пересвідчитися, з періодом 2, а остача від ділення на 3 числа n повторюється, звичайно ж, із періодом 3. Тож остача від ділення на 3 числа $n\cdot 2^n+1$ повторюється з періодом $2\cdot 3=6$. Тепер досить просто перевірити, що це число ділиться на 3 тоді й лише тоді, коли n дає остачу 1 або 2 при діленні на 6. У проміжку від 2000 до 2012 відповідних чисел є п'ять: 2000, 2005, 2006, 2011 і 2012.

19. ***Відповідь:*** 2012.

Розв'язання. Покладімо $x_0=-\frac{d}{c}$. Тоді рівність з умови виглядатиме таким чином:

$$|4x_0+a|+|bx_0+503|=0.$$

Це можливо лише за умови $4x_0+a=bx_0+503=0$, звідки випливає, що $x_0\neq 0$, $a=-4x_0$, $b=-\frac{503}{x_0}$, $ab=4\cdot 503=2012$.

Зауважимо, що числа a, b, c, d, які задовольняють умову, існують: наприклад, підходить четвірка значень $a=503$, $b=4$, $c=8$, $d=1006$.

20. ***Відповідь:*** 7.

Розв'язання. Спершу зауважимо, що, оскільки довжину відрізків необмежено, немає сенсу проводити відрізки, які лежать на одній прямій і перетинаються: два таких відрізки можна замінити одним довшим.

Нехай уже накреслено n відрізків і вони ділять площину на $P(n)$ частин. Під час проведення $(n+1)$-го відрізка він перетнеться з уже накресленими не більше ніж у n точках, які обмежуватимуть на ньому не більше ніж $n-1$ частину, кожна з яких може розділяти певну область площини на дві (при цьому кінці відрізка можуть «стирчати», не розділяючи площину). Отже, проведення $(n+1)$-го відрізка додає до кількості частин площини не більше ніж $n-1$, тобто $P(n+1)\leqslant P(n)+(n-1)$. Тоді, враховуючи, що $P(2)=1$, $P(5)\leqslant P(4)+3\leqslant (P(3)+2)+3\leqslant ((P(2)+1)+2)+3=7$.

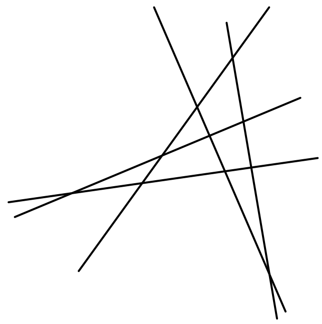

Рис. 21

Приклад того, як п'ять відрізків можуть ділити площину на 7 частин, наведено на рис. 21.

Середня ліга. Вихідний рубіж

1. ***Відповідь:*** 2^{2011}.

Розв'язання. Зафіксуємо довільний елемент деякої 2012-елементної множини й розглянемо всі її підмножини, які містять цей елемент. Кожен з інших 2011 елементів може або входити, або не входити у підмножину, тому загальна кількість можливих підмножин складає 2^{2011}. Зрозуміло, що перетин довільних двох із них не є порожнім, бо містить зафіксований нами елемент.

Щоб показати, що більшу кількість підмножин вибрати не можна, розбиймо всі 2^{2012} можливих підмножин на 2^{2011} пар: в одну пару зведемо підмножини, які доповнюють одна одну до 2012-елементної множини (тобто в одній підмножині будуть ті й тільки ті елементи, яких нема у другій). Кожна така пара має, очевидно, порожній перетин, тому з кожної з 2^{2011} пар можна взяти у набір щонайбільше одну підмножину.

2. *Задача № 2 вихідного рубежу молодшої ліги.*

3. ***Відповідь:*** $x=\pm 1$.

Розв'язання. Перепишімо це рівняння як квадратне відносно z: $z^2+2xyz+(x^2+y^2-1)=0$. Дискримінант такого тричлена дорівнює $D=4x^2y^2-4(x^2+y^2-1)=4(x^2-1)(y^2-1)$. Якщо $x^2-1<0$, то, наприклад, при $y=2$ маємо, що $D<0$, тобто рівняння коренів не має. Аналогічно, якщо $x^2-1>0$, при $y=0$ знову маємо від'ємний дискримінант. Якщо ж $x^2-1=0$, тобто $x=\pm 1$, дискримінант дорівнює нулю незалежно від значення y, тобто відповідне число z існує завжди.

4. *Задача № 4 вихідного рубежу молодшої ліги.*

5. ***Відповідь:*** 498 гривень.

Розв'язання. Оскільки обидва числа 300 і 198 діляться на 6, Петрик зможе зняти лише таку суму, яка теж ділитиметься на 6, тобто хлопець не зможе зняти більше за 498 гривень. Покажемо, як Петрик зніме таку суму.

Поки на його рахунку залишається сума c, більша за 404 гривні, Петрик діє таким чином: знімає 300 гривень (на рахунку залишається $c-300$ гривень), вкладає 198 гривень (на рахунку стає $c-102$ гривні), знімає 300 гривень (на рахунку стає $c-402>0$), вкладає 198 гривень (стає $c-204$) і ще раз вкладає 198 гривень — на Петриковому рахунку стає $c-6$ гривень. Отже, Петрик може поступово залишати на рахунку 494, 488, 482, …, 410, 404 гривні. Після цього він знімає 300 гривень (стає 104), вкладає 198 (стає 302) і востаннє знімає 300: на рахунку лишається 2 гривні, а у Петрика — $500-2=498$.

6. ***Відповідь:*** 8.

Розв'язання. Добре відомо, що сума цифр числа дає ту ж остачу від ділення на 9, що й саме число. Тому кожне число, записане на дошці, має остачу, що дорівнює $8^{101}\equiv(-1)^{101}=-1\equiv 8\,(\mathrm{mod}\,9)$. Оскільки є лише одна цифра, що дає остачу 8 при діленні на 9, і це цифра 8, то саме вона й була записана на дошці останньою.

7. *Задача № 7 вихідного рубежу молодшої ліги.*

8. ***Відповідь:*** $\sqrt{2}$ см.

Розв'язання. Якщо катети прямокутного трикутника дорівнювали по 1 см, а стали рівними 2 см, гіпотенуза стала більшою на $\sqrt{2^2+2^2}-\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ см.

З іншого боку, якби гіпотенуза деякого трикутника з катетами завдовжки x та y сантиметрів збільшилася більш ніж на $\sqrt{2}$ см, мали б місце співвідношення:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}>\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y+1)^2>x^2+y^2+2+2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 2(x+y)>2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ (x+y)^2>2(x^2+y^2),$$

звідки після розкриття дужок випливає, що $(x-y)^2<0$ — суперечність.

9. *Задача № 9 вихідного рубежу молодшої ліги.*

10. *Задача № 10 вихідного рубежу молодшої ліги.*

11. ***Відповідь:*** 999.

Розв'язання. Скористаймося тим, що $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, $k\in\mathbb{N}$. Якщо розписати кожен доданок у такій формі, матимемо:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2011}{2012!}=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2010!}-\frac{1}{2011!}\right)+\left(\frac{1}{2011!}-\frac{1}{2012!}\right)=$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{2011!}+\frac{1}{2011!}\right)-\frac{1}{2012!}=1-\frac{1}{2012!}=\frac{2012!-1}{2012!}.$$

Зрозуміло, що одержаний дріб є нескоротним. Число 2012! закінчується трьома нулями (бо має, наприклад, множник 1000 у своєму складі). Тож останні цифри чисельника $2012!-1$ — три дев'ятки.

12. *Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.*

13. ***Відповідь:*** 6 ігор.

Розв'язання. Команди набрали в сумі щонайменше $1+2+3+4+5=15$ очок. Оскільки в кожній грі розігрують не більше ніж 3 очки, було зіграно не менше від 5 ігор. Але саме 5 ігор зіграти не могли, бо це означало б, що в кожному матчі було розіграно рівно 3 очки, тобто всі ігри закінчувалися перемогами однієї або іншої команди. Але тоді жодна з команд не змогла б набрати рівно

1 очко.
А от 6 ігор провести на турнірі могли: приклад див. у турнірній таблиці на рис. 22.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Сума**
1	—	1	0	0	0	1
2	1	—			1	2
3	3		—			3
4	3			—	1	4
5	3	1		1	—	5

Рис. 22

14. *Задача № 14 вихідного рубежу молодшої ліги.*

15. ***Відповідь:*** $a=-2$.
Розв'язання. Якщо многочлени x^4+ax^2+1 та x^2+ax+1 мають спільний корінь, то цей же корінь має і многочлен $x^4+ax^2+1-x(x^2+ax+1)=x^4-x^3+1-x=(1-x)(1-x^3)=(1-x)^2(x^2+x+1)$. Тричлен x^2+x+1 коренів не має, тож єдиним спільним коренем може бути тільки $x=1$. Підставивши це значення в будь-який із двох многочленів, матимемо, що $a+2=0$, тобто $a=-2$. З іншого боку, коли $a=-2$, число $x=1$ справді є спільним коренем многочленів.

16. *Задача № 16 вихідного рубежу молодшої ліги.*

17. *Задача № 17 вихідного рубежу молодшої ліги.*

18. ***Відповідь:*** $n=3$.
Розв'язання. Число 5^n містить не більше ніж n цифр, бо є меншим від найменшого $(n+1)$-цифрового числа 10^n. Отже, сума цифр числа 5^n не перевищує $9n$. Методом математичної індукції досить просто показати, що $9n<2^n$, коли $n\geqslant 6$: для $n=6$ це слід перевірити безпосередньо, а якщо $9n<2^n$, то $9(n+1)<9(n+n)=2\cdot 9n<2\cdot 2^n=2^{n+1}$.
Таким чином, сума цифр числа 5^n може дорівнювати числу 2^n, лише якщо n не перевищує 5. Тепер шляхом перебору неважко встановити, що умову задачі задовольняє лише $n=3$.

19. *Задача № 19 вихідного рубежу молодшої ліги.*

20. ***Відповідь:*** $60°$.
Розв'язання. Нехай A_2, B_2 і C_2 — точки дотику вписаного кола до сторін трикутника (рис. 23). Тоді, оскільки $IA_2=IB_2=IC_2=r$ (де r — радіус вписаного кола ΔABC) і точки A_2, B_2, C_2 є серединами відрізків IA_1, IB_1 та IC_1, то $IA_1=IB_1=IC_1=2r$. Отже, I — центр кола, описаного навколо $A_1B_1C_1$, і це коло має радіус $2r$. Тоді $IB=2r$. Лишається помітити, що в прямокутному трикутнику IA_2B відношення $\frac{IA_2}{IB}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$, звідки випливає, що $\angle IBA_2=30°$. Оскільки BI — бісектриса, $\angle ABC=2\angle IBA_2=60°$.

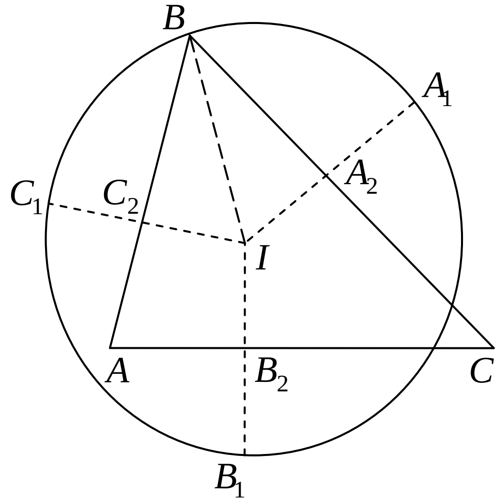

Рис. 23

Середня ліга. Заліковий рубіж

1. *Задача № 1 залікового рубежу молодшої ліги.*

2. *Задача № 2 залікового рубежу молодшої ліги.*

3. ***Відповідь:*** $a \leqslant \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Перепишімо рівняння $f(y) = f(x) + y$ як квадратне відносно y:

$$y^2 + ay + b = x^2 + ax + b + y \;\Leftrightarrow\; y^2 + (a-1)y - (x^2 + ax) = 0.$$

Умова задачі рівносильна тому, що за довільного значення x дискримінант цього рівняння, який дорівнює $(a-1)^2 + 4(x^2 + ax)$, є невід'ємним. Оскільки $(a-1)^2 + 4(x^2 + ax) = 4x^2 + 4ax + (a-1)^2$ — квадратний тричлен відносно x із додатним старшим коефіцієнтом, така умова справджуватиметься тоді й тільки тоді, коли дискримінант цього тричлена недодатний. Дискримінант дорівнює $16a^2 - 16(a-1)^2 = 16(2a-1)$, тож умову задачі задовольняють ті й лише ті значення a, що не перевищують $\frac{1}{2}$.

4. ***Відповідь:*** 8.

Розв'язання. Трикутник ABC має площу 2 тоді й лише тоді, коли висота, проведена до його сторони AB, дорівнює 1. Розгляньмо три випадки: коли прямий кут трикутника розташований у вершині A, у вершині B чи у вершині C. Перші два випадки, очевидно, дають чотири варіанти розташування точки C: по два з кожного боку від прямої, що містить відрізок AB. У вершині ж C прямий кут буде в тому й тільки в тому випадку, коли ця вершина лежить на колі з діаметром AB. Враховуючи, що відстань від C до AB повинна дорівнювати 1, маємо ще чотири варіанти розташування (рис. 24). Усього 8 варіантів.

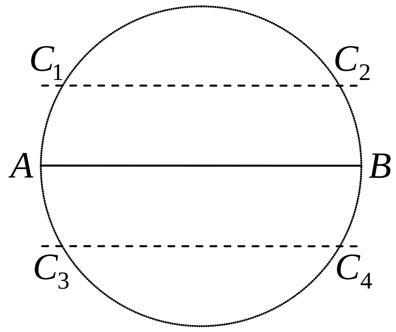

Рис. 24

5. *Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 залікового рубежу молодшої ліги.*

7. ***Відповідь:*** трійки (a, a, a), $a > 0$, а також $(b, b, 1-b)$, $0 < b < 1$ (порядок чисел у трійці довільний).

Розв'язання. Очевидно, що трійка однакових чисел (a, a, a), де $a > 0$, задовольняє умову задачі. Нехай тепер серед трьох чисел x, y, z, які задовольняють умову, є два різні числа — хай, без утрати загальності, $x \neq y$. Тоді запишемо:

$$x + y^2 + z^2 = x^2 + y + z^2 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = y - x \;\Rightarrow\; x + y = 1.$$

Якщо $x = z$, маємо трійку чисел $(x, 1-x, x)$; якщо ж $x \neq z$, аналогічно отримаємо, що $x + z = 1$, тобто $z = y = 1 - x$ і маємо трійку $(1-y, y, y)$. Так чи інакше, трійка чисел має вигляд $(b, b, 1-b)$, $0 < b < 1$ (b має бути меншим за 1, бо інакше число $1-b$ не було б додатним). З іншого боку, кожна трійка такого вигляду справді задовольняє умову, бо

$$b + b^2 + (1-b)^2 = 2b^2 - b + 1 = (1-b) + b^2 + b^2.$$

8. ***Відповідь:*** ГМТ — коло радіуса $\sqrt{2 - OA^2}$ з центром у точці O.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — прямокутник, вершини B й D якого лежать на колі ω. Проведімо через центр O кола прямі, що паралельні до сторін прямокутника. Позначимо точку перетину прямої, що містить сторону AB прямокутника, із перпендикулярною до неї прямою, проведеною через O, як I_{AB} (рис. 25). Аналогічно визначимо точки I_{BC}, I_{CD} та I_{DA}. Незалежно від розташування точок справджуються рівності $OA^2 = OI_{AB}^2 + OI_{DA}^2$, $OB^2 = OI_{AB}^2 + OI_{BC}^2$, $OC^2 = OI_{BC}^2 + OI_{CD}^2$, $OD^2 = OI_{CD}^2 + OI_{DA}^2$. Тому можемо записати:

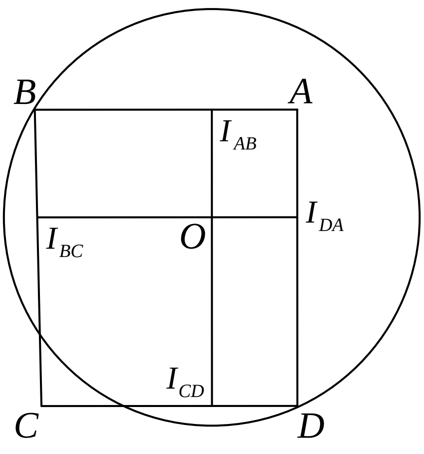

Рис. 25

$$OC^2 = OI_{BC}^2 + OI_{CD}^2 = OI_{BC}^2 + OI_{CD}^2 + (OI_{AB}^2 - OI_{AB}^2) + (OI_{DA}^2 - OI_{DA}^2) =$$

$$= (OI_{AB}^2 + OI_{BC}^2) + (OI_{CD}^2 + OI_{DA}^2) - (OI_{AB}^2 + OI_{DA}^2) = OB^2 + OD^2 - OA^2 = 2 - OA^2.$$

Отже, всі точки, що задовольняють умову, лежать на колі радіуса $\sqrt{2-OA^2}$ з центром у точці O. Позначимо таке коло через ρ. Доведімо тепер, що всі точки цього кола задовольняють умову.

Нехай C_1 — точка, що лежить на колі ρ. Зауважимо, що радіус кола ρ більший за 1, тобто C_1 лежить зовні кола ω. Побудуймо коло, діаметром якого є відрізок AC_1 (рис. 26). Позначимо через B одну з точок перетину побудованого кола та кола ω. На колі ω можна вибрати дві точки D таких, що $AD \perp AB$. Кожна з них разом із точками A та B однозначно задає й точку C таку, що $ABCD$ — прямокутник. Точка C має лежати на прямій BC_1, оскільки за побудовою пряма BC_1 перпендикулярна до AB і проходить через точку B. З іншого боку, з доведеного вище випливає, що точка C має лежати на колі ρ. Але у прямої BC_1 із колом ρ є лише дві точки перетину, одна з яких — C_1; обидва варіанти вибору точки D не можуть давати одну й ту саму точку перетину, відмінну від C_1, тому для одного з варіантів вибору точки D ABC_1D — прямокутник, вершини B і D якого лежать на ω.

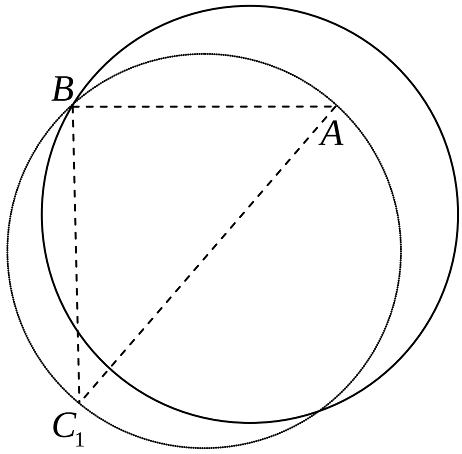

Рис. 26

9. *Задача № 9 залікового рубежу молодшої ліги.*

10. *Задача № 10 залікового рубежу молодшої ліги.*

11. *Задача № 11 залікового рубежу молодшої ліги.*

12. ***Відповідь:*** $80°$ та $100°$.
Розв'язання. Геометричне місце точок, для яких $\angle AOD = 80°$, — деяке коло, що проходить через точки A й D, а ГМТ точок, для яких $\angle BOC = 100°$ — деяке коло, що проходить через B і C. Точка O повинна лежати на перетині цих двох кіл (рис. 27), тому можливих розташувань точки O є щонайбільше два.
Тепер укажемо на дві точки всередині ромба, які справді задовольняють умову. Нехай точку O_1 на діагоналі AC вибрано так, що $\angle AO_1D = 80°$ (така точка, очевидно, є, бо $\angle ACD = \angle BAD/2 = 55° < 80°$). Тоді

$$\angle BO_1C = \angle DO_1C = 180° - \angle AO_1D = 100°.$$

У цьому випадку $\angle AO_1B = \angle AO_1D = 80°$.
Якщо ж на діагоналі BD вибрати точку O_2, для якої $\angle BO_2C = 100°$, то матимемо, що

$$\angle AO_2D = \angle CO_2D = 180° - \angle BO_2C = 80°.$$

У цьому разі $\angle AO_2B = \angle BO_2C = 100°$.

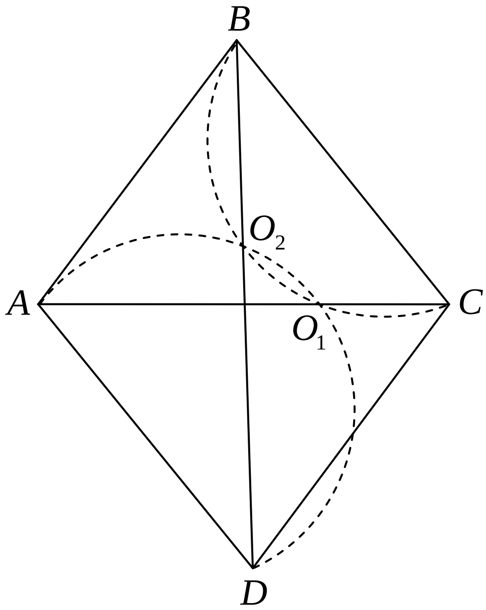

Рис. 27

O_1 і O_2 — дві різні точки (інакше мали би рівність $\angle AO_1B = \angle AO_2B$), тому інших точок, які б задовольняли умову, не існує, а кут AOB може дорівнювати лише $80°$ або $100°$.

13. *Задача № 13 залікового рубежу молодшої ліги.*

14. ***Відповідь:*** (1, 1).
Розв'язання. Припустімо спершу, що числа x та y не є взаємно простими, тобто діляться на одне й те саме просте число p. Нехай p^a, $a \in \mathbb{N}$, — найбільший степінь числа p, на який ділиться число x, а p^b, $b \in \mathbb{N}$, — найбільший степінь числа p, на який ділиться число y. Припустимо також, не втрачаючи загальності, що $a \geqslant b$. Тоді сума $x^2 + y^2$ ділиться на p^{2b}, бо на цей степінь діляться

обидва її доданки. У той же час число $x^3 + y$ не ділиться на p^{2b}, бо x^3 на p^{2b} ділиться, а y, згідно з вибором числа b, ні. Це суперечить подільності числа $x^3 + y$ на $x^2 + y^2$.

З умови задачі випливає, що $y(xy-1) = x(x^2 + y^2) - (x^3 + y) \,\vdots\, x^2 + y^2$. Оскільки, як ми з'ясували, числа x та y взаємно прості, число y також взаємно просте із сумою $x^2 + y^2$, а отже на $x^2 + y^2$ має ділитися множник $xy - 1$. Але, враховуючи, що $x^2 + y^2 \geqslant 2xy > xy - 1$, це можливо лише за умови $xy - 1 = 0$, тобто $x = y = 1$. Пара ж (1, 1), як нескладно переконатися, справді задовольняє умову задачі.

15. *Задача № 15 залікового рубежу молодшої ліги.*

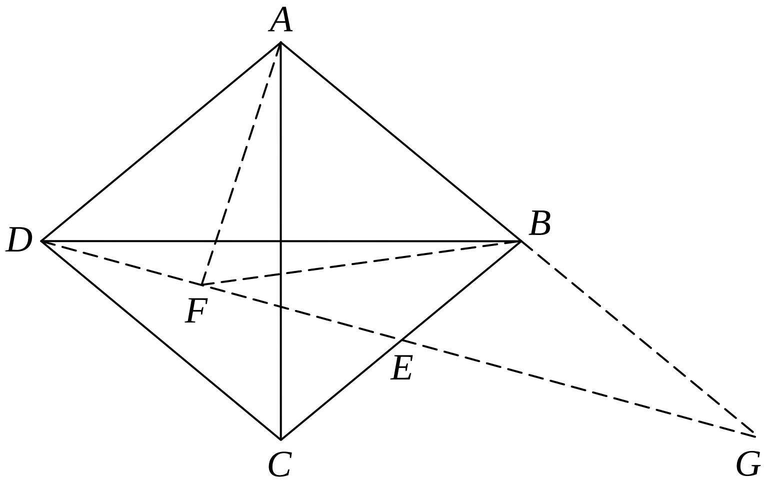

Рис. 28

16. ***<u>Відповідь:</u>*** $130°$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай G — точка перетину прямих AB та DE (рис. 28). Тоді $\Delta BEG = \Delta CED$ (бо їхні сторони паралельні і $BE = CE$), звідки $BG = CD = AB$. У прямокутному трикутнику AFG відрізок FB — медіана, внаслідок чого $FB = AG/2 = AB = BC$. Значить, трикутники ABF і FBC рівнобедрені. Враховуючи, що сума кутів чотирикутника $ABCF$ дорівнює $360°$, запишемо:

$$2\angle CBD + 2(\angle AFB + \angle CFB) = \angle ABC + \angle BCF + \angle CFA + \angle FAB = 360°.$$

Звідси $\angle AFB + \angle CFB = 180° - \angle CBD = 140°$. А отже,

$$\angle CFD = 360° - (\angle AFB + \angle CFB) - \angle AFD = 130°.$$

17. *Задача № 17 залікового рубежу молодшої ліги.*

18. ***<u>Відповідь:</u>*** (4, 1, 6, 5) та (6, 5, 4, 1).

<u>Розв'язання.</u> Піднесімо кожне з рівнянь системи до квадрата і додаймо їх:

$$(ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 + (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 = 34^2 + 19^2 = 1517 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 1517 = 37 \cdot 41.$$

Прості числа 37 та 41 однозначно розкладаються на суми квадратів натуральних чисел:

$$37 = 1^2 + 6^2, \; 41 = 4^2 + 5^2.$$

Залишається перебрати вісім можливих варіантів четвірки (a, b, c, d). Серед них систему задовольняють два набори — (4, 1, 6, 5) і (6, 5, 4, 1).

19. *Задача № 19 залікового рубежу молодшої ліги.*

20. *Задача № 20 залікового рубежу молодшої ліги.*

<u>Старша ліга. Вихідний рубіж</u>

1. *Задача № 1 вихідного рубежу середньої ліги.*

2. ***<u>Відповідь:</u>*** 80.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $a = \underbrace{11...1}_{n+1}$, а $b = 111111111$. Тоді $1\underbrace{22...2}_{n}1 = 11a$, а $999\,999\,999 = 9b$. Зауважимо, що число b не ділиться на 11, тому для того, щоб $11a \,\vdots\, 9b$, необхідно й достатньо, щоб $a \,\vdots\, b$ і $\frac{a}{b} \,\vdots\, 9$. Умова $a \,\vdots\, b$ означає, що число a повинно мати кількість одиниць, кратну 9, тобто $n + 1 = 9k$, при цьому частка $\frac{a}{b} = 1\underbrace{000000001\,000000001...000000001}_{k-1 \text{ блок}}$. Отже, $\frac{a}{b} \,\vdots\, 9$ тоді й лише тоді, коли

$k \vdots 9$. Таким чином, шукане найменше значення n досягається при $k = 9$. Це значення дорівнює $n = 9k - 1 = 80$.

3. *Задача № 3 вихідного рубежу середньої ліги.*

4. ***Відповідь:*** 4022.
Розв'язання. Легко зрозуміти, що зрізана n-кутна піраміда має $n+2$ грані: n бічних, основу і грань, паралельну до основи. Ребер же у такої фігури $3n$: n бічних, n на основі і n на грані, що паралельна до основи. Тож різниця кількості ребер та кількості граней дорівнює $3n-(n+2) = 2n-2$ і при $n = 2012$ складає 4022.

5. *Задача № 5 вихідного рубежу середньої ліги.*

6. *Задача № 6 вихідного рубежу середньої ліги.*

7. ***Відповідь:*** $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.
Розв'язання. Оскільки $f(x) = (x+6)^2 - 6$, то

$$f\left(f(x)\right) = \left(f(x)+6\right)^2 - 6 = \left((x+6)^2 - 6 + 6\right)^2 - 6 = (x+6)^4 - 6.$$

Повторивши аналогічні викладки ще тричі, одержимо, що $f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = (x+6)^{32} - 6$, звідки $f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0 \iff (x+6)^{32} - 6 = 0 \iff x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

8. *Задача № 8 вихідного рубежу середньої ліги.*

9. ***Відповідь:*** 48.
Розв'язання. Підставмо у другу рівність з умови трійку рівних чисел $z = y = x$:

$$x*(x*x) = (x*x) + x \Rightarrow x*0 = 0 + x = x.$$

Тепер у ту ж рівність підставимо $z = y$:

$$x*(y*y) = (x*y) + y \Rightarrow (x*y) + y = x*0 = x \Rightarrow x*y = x - y.$$

Залишається переконатися, що якщо $x*y = x - y$, то умова задачі справді виконується. Отже, $2012*1964 = 2012 - 1964 = 48$.

10. ***Відповідь:*** (4, 1), (4, -3), (-4, 1), (-4, -3).
Розв'язання. Легко побачити, що $x^2 = y^2 + 2y + 13 \iff x^2 = (y+1)^2 + 12 \iff x^2 - (y+1)^2 = 12$, тобто початкове рівняння можна переписати як $(x+y+1)(x-y-1) = 12$. Враховуючи, що обидва множники однакової парності, маємо два варіанти: або один із них дорівнює 2, а інший 6, або один із них дорівнює -2, а інший -6. Розв'язавши відповідні системи рівнянь, одержимо наведені у відповіді розв'язки.

11. *Задача № 11 вихідного рубежу середньої ліги.*

12. *Задача № 12 вихідного рубежу молодшої ліги.*

13. *Задача № 13 вихідного рубежу середньої ліги.*

14. ***Відповідь:*** розв'язків немає.
Розв'язання. Припустімо, деяка трійка чисел (x, y, z) задовольняє систему рівнянь. Із другого рівняння системи $z^2 - 2y^2 = 1$ випливає, що число z непарне, тобто $z = 2m+1$ для деякого цілого m. Підставимо це й одержимо, що $2y^2 = z^2 - 1 = 4m^2 + 4m \Rightarrow y^2 = 2(m^2 + m)$, а отже, y — парне число. Тоді з першого рівняння системи $x^2 - y^3 = 7z^4$ випливає, що x непарне.
Нехай $y = 2k$, а $x = 2n+1$ для деяких цілих k й n. Підставивши це в перше рівняння системи і скориставшись тим, що $z^2 = 2y^2 + 1$, матимемо

$$(4n^2 + 4n + 1) - 8k^3 = 7z^4 = 7(2y^2+1)^2 = 7(4y^4 + 4y^2 + 1).$$

Але така рівність неможлива, бо в разі ділення на 4 ліва її частина дає остачу 1, а права — 3. Дістали суперечність.

15. *Задача № 15 вихідного рубежу середньої ліги.*

16. ***Відповідь:*** 7.
Розв'язання. Спершу розглянемо покриття за допомогою семи кругів — воно показане на рис. 29. Щоб переконатися, що рисунок є формально правильним, упишемо в коло радіуса 2 правильний шестикутник зі стороною довжини 2 та розіб'ємо його на одиничні трикутники, як показано на рис. 30. Тепер зрозуміло, що центральне коло радіуса 1 описане навколо правильного шестикутника, утвореного шістьма центральними трикутниками (рис. 30), а центри решти шести кіл збігаються з серединами сторін великого шестикутника.

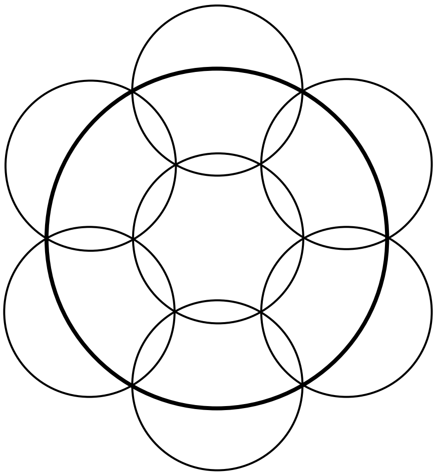

Рис. 29

Далі доведемо, що меншою кількістю кіл обмежитися не вийде. Справді, вже щоб покрити межу круга радіуса 2, нам потрібно щонайменше шість кругів радіуса 1, бо якби якимось кругом ми змогли покрити дугу $\cup AB$, що становить більше ніж $1/6$ частину кола, то хорда AB мала б довжину, більшу за 2, тобто перевищувала б діаметр маленького круга. Але якщо ми змогли покрити межу великого круга рівно шістьма маленькими, то кожен з них повинен покривати рівно $1/6$ частину кола, тобто перетинатися з колом у точках, що є кінцями діаметра маленького круга. Таким чином, спосіб покриття шістьма кругами межі великого круга єдиний та збігається (з точністю до повороту) з показаним на рис. 29 — і без сьомого кола обійтись не вдасться.

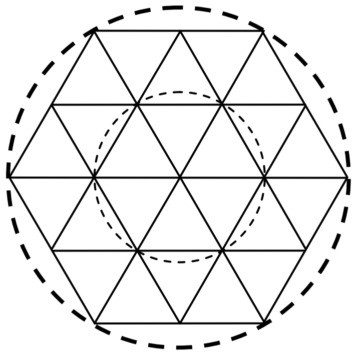

Рис. 30

17. ***Відповідь:*** 41.
Розв'язання. Пофарбуємо всі 40 білих комірок, зображених на рис. 31, у 40 різних кольорів, а решту комірок (на рисунку вони сірі) — у 41-й колір. Неважко переконатися, що таке розфарбування у 41 колір задовольняє умову задачі.

Зафіксуємо тепер довільне розфарбування таблиці. Якщо кожен рядок таблиці містить комірки не більше ніж 4 кольорів, то загальна кількість кольорів в усіх рядках не перевищує $10 \cdot 4 = 40$. Нехай тоді в деякому рядку таблиці є комірки 5 кольорів. Якби в кожному іншому рядку були комірки щонайбільше 4 відмінних від них кольорів, то всього мали б не більше за $5 + 9 \cdot 4 = 41$ колір. Лишається розглянути останній випадок: коли в деякому рядку таблиці є комірки 5 кольорів, а в іншому рядку — комірки інших 5 кольорів. У цьому разі кожен стовпчик містить по одній комірці даних двох рядків і ще 3 комірки щонайбільше трьох нових кольорів. Таким чином, усі десять стовпчиків містять комірки 10 кольорів із двох вибраних рядків і ще максимум $10 \cdot 3$ нових кольорів, загалом $10 + 10 \cdot 3 = 40$ кольорів. Як бачимо, в жодному з випадків кількість кольорів не перевищує 41.

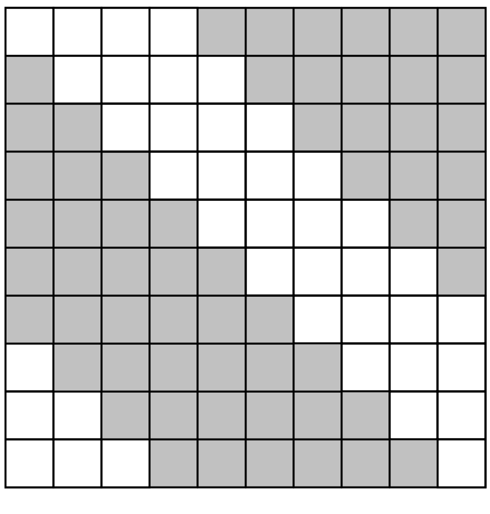

Рис. 31

18. *Задача № 18 вихідного рубежу середньої ліги.*

19. ***Відповідь:*** 4.
Розв'язання. Якщо $\sin\alpha = s$, то $\alpha = \arcsin s + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, або $\alpha = \pi - \arcsin s + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді $\frac{\alpha}{2} = \frac{\arcsin s}{2} + \pi k$ чи $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \arcsin s}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Залежно від парності k значення кута $\frac{\alpha}{2}$ може дорівнювати $\frac{\arcsin s}{2} + 2\pi l$, $\frac{\arcsin s}{2} + \pi + 2\pi l$, $\frac{\pi - \arcsin s}{2} + 2\pi l$ або $\frac{\pi - \arcsin s}{2} + \pi + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Оскільки синус кута не залежить від доданка вигляду $2\pi l$, число $\sin\frac{\alpha}{2}$ може мати не більше ніж чотири значення.

Якщо ж, наприклад, $s=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arcsin s=\frac{\pi}{3}$, тому числа $\frac{\arcsin s}{2}$, $\frac{\arcsin s}{2}+\pi$, $\frac{\pi-\arcsin s}{2}$ та $\frac{\pi-\arcsin s}{2}+\pi$ набувають відповідно значень $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$, а їхні синуси дорівнюють $\pm\frac{1}{2}$ і $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто мають рівно чотири різні значення.

20. *Задача № 20 вихідного рубежу середньої ліги.*

Старша ліга. Заліковий рубіж

1. ***Відповідь:*** $\frac{3\cdot 2011\cdot 2012}{2}=6\,069\,198$.

Розв'язання. На рис. 32 показано три типи ромбів, наявні в трикутнику. Ромбів кожного з цих типів, з міркувань симетрії, однакова кількість. Підрахуємо, наприклад, кількість ромбів другого типу. Ромб такого типу, що розташовується в першому й другому рядках трикутника (див. рис. 33), є один; ромбів, що містяться в другому й третьому рядках трикутника, — два; …; ромбів, які розміщуються в передостанньому й останньому 2012-му рядках, — 2011. Таким чином, ромбів одного типу маємо $\frac{2011\cdot 2012}{2}=2\,023\,066$, а ромбів усіх трьох типів — $6\,069\,198$.

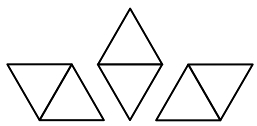

Рис. 32

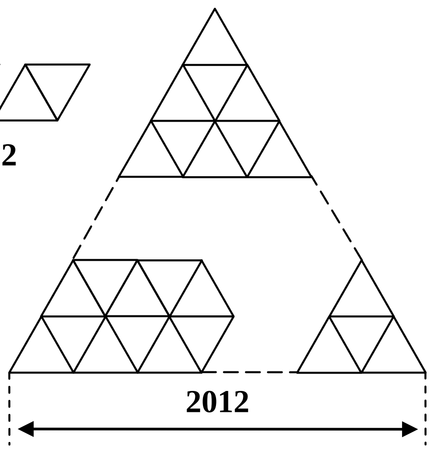

Рис. 33

2. ***Відповідь:*** $2000^2-1=3\,999\,999$.

Розв'язання. Нехай $a=m+2000n$ і $b=n+2000m$. Тоді найбільший спільний дільник d цих чисел ділить також і пару чисел $2000a-b=(2000^2-1)n$ та $2000b-a=(2000^2-1)m$. Оскільки m і n взаємно прості, $2000^2-1\,\vdots\, d \;\Rightarrow\; d\leqslant 2000^2-1$.

З іншого боку, якщо $m=2000^2-2000-1$, а $n=1$, то $a=(2000^2-2000-1)+2000=2000^2-1$, а $b=1+2000\cdot(2000^2-2000-1)=(2000^2-1)(2000-1)$, і обидва числа діляться на 2000^2-1.

3. *Задача № 3 залікового рубежу середньої ліги.*

4. *Задача № 4 залікового рубежу середньої ліги.*

5. *Задача № 5 залікового рубежу молодшої ліги.*

6. *Задача № 6 залікового рубежу молодшої ліги.*

7. *Задача № 7 залікового рубежу середньої ліги.*

8. *Задача № 8 залікового рубежу середньої ліги.*

9. *Задача № 9 залікового рубежу молодшої ліги.*

10. *Задача № 10 залікового рубежу молодшої ліги.*

11. ***Відповідь:*** 3.

Розв'язання. Шляхом елементарного перебору можна переконатися, що із трьох чисел a_1, $a_2=a_1+2$, $a_3=a_1+4$ хоча б одне число a_k даватиме остачу 2 або 3 від ділення на 5. Значення

a_k^2+1 для відповідного числа ділитиметься на 5. Якщо при цьому $a_k \neq 2$, то число a_k^2+1 не буде простим, що суперечитиме умові. Таким чином, прогресія, яка не містить двійки, не може мати довжини, більшої за 2. З іншого боку, найдовша прогресія з різницею 2, яка містить двійку і задовольняє умову задачі, — 2, 4, 6 — має довжину 3.

12. *Задача № 12 залікового рубежу середньої ліги.*

13. *Задача № 13 залікового рубежу молодшої ліги.*

14. *Задача № 14 залікового рубежу середньої ліги.*

15. ***Відповідь:*** $\frac{\pi}{8}$ та $\frac{5\pi}{8}$ ($22{,}5°$ та $112{,}5°$).

Розв'язання. Якщо однаковими є трійки чисел, то збігаються і їхні суми:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha+(\sin\alpha+\sin 3\alpha)=\cos 2\alpha+(\cos\alpha+\cos 3\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha(1+2\cos\alpha)=\cos 2\alpha(1+2\cos\alpha).$$

Якщо $1+2\cos\alpha=0$, то $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тоді $\sin 3\alpha=0$, але ні одне з чисел α, 2α і 3α, очевидно, не має вигляду $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi l$, тому жоден з косинусів $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$ і $\cos 3\alpha$ не дорівнює нулю, а отже набори не збігаються.

Якщо ж $1+2\cos\alpha\neq 0$, то можемо скоротити на цей вираз, звідки матимемо $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$, тобто $tg 2\alpha=1 \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. У проміжок чисел від 0 до π потрапляють значення $\alpha=\frac{\pi}{8}$ та $\alpha=\frac{5\pi}{8}$. В обох випадках, як неважко пересвідчитися, $\sin 3\alpha=\cos\alpha$, $\sin\alpha=\cos 3\alpha$ і $\sin 2\alpha=\cos 2\alpha$.

16. *Задача № 16 залікового рубежу середньої ліги.*

17. *Задача № 17 залікового рубежу молодшої ліги.*

18. *Задача № 18 залікового рубежу середньої ліги.*

19. ***Відповідь:*** $P(x)=2012x$.

Розв'язання. Зі співвідношення, заданого в умові задачі, маємо, що $P(x+1)=2P(x)-P(x-1)$. Методом математичної індукції покажемо, що для всіх цілих невід'ємних n значення $P(n)=2012n$. База індукції — твердження для $n=0$ і $n=1$ — випливає безпосередньо з умови задачі. А якщо $P(n)=2012n$ і $P(n-1)=2012(n-1)$, то

$$P(n+1)=2P(n)-P(n-1)=2\cdot 2012n-2012(n-1)=2012(n+1).$$

Тепер розгляньмо многочлен $Q(x)=P(x)-2012x$. Многочлен $Q(x)$ має нескінченну кількість коренів (усі цілі невід'ємні числа), тому він є тотожним нулем — отже, $P(x)=2012x$. Залишається переконатися, що многочлен $P(x)=2012x$ справді задовольняє умову.

20. *Задача № 20 залікового рубежу молодшої ліги.*