

Лінійна алгебра та комбінаторика

1. В дивному місті k подружніх пар і n клубів. Відомо, що для чоловіка та жінки кількість клубів, які вона обидва хоча б раз відвідували, є непарною тоді і тільки тоді, коли вони належать до одного подружжя. Доведіть, що $k \leq n$.
2. Нехай n - парне число, A_1, \dots, A_n - різні підмножини множини $\{1, \dots, n\}$. Припустимо, що кожна з них містить парну кількість елементів. Доведіть, що тоді перетин деяких двох множин також міститиме парну кількість елементів.
3. Тестове завдання районної олімпіади з конфліктології складається з n запитань з варіантами відповіді «так» або «ні». За кожну правильну відповідь спочатку зараховується 1 бал, а після олімпіади журі обирає додатну «вагу» кожного питання. В олімпіаді брали участь k учнів, які дали такий набір відповідей на питання тесту, що досвідчене журі може обрати ваги запитань таким чином, щоб учні за результатами олімпіади розташувалися у довільному потрібному порядку. Доведіть, що $k \leq n$.
4. На математичній конференції довільні два учасника є або друзями або незнайомцями. Всі учасники конференції вечеряють у двох великих холах, при цьому кожен хоче, щоб у його холі була парна кількість його друзів. Доведіть, що якщо таку вечерю можна організувати, то кількість способів це зробити буде степенем двійки.
5. У R^n обрано множину із більше ніж $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ точок. Доведіть, що серед відстаней між різними точками цього набору знайдуться принаймні 3 різних числа.