Комплексні числа–3

1. Знайдіть усі $z \in \mathbb{C}$, для яких $4z^2 + 8|z|^2 = 8$.

2. Нехай a, b, c — дійсні числа і $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Обчисліть
$$(a + b\omega + c\omega^2)(a + c\omega + b\omega^2).$$

3. Нехай p і q — два комплексні числа, причому $q \neq 0$. Доведіть, що якщо корені квадратного рівняння $x^2 + px + q^2 = 0$ мають однаковий модуль, то $\frac{p}{q}$ — дійсне число.

4. Знайдіть множину точок (x, y) на комплексній площині таких, що
$$|\sqrt{x^2 + 4} + i\sqrt{y - 4}| = \sqrt{10}.$$

5. Знайдіть множину точок z на комплексній площині таких, що
$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2.$$

6. Знайдіть усі комплексні числа z такі, що $|z| = 1$ і
$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

7. Розв'яжіть рівняння а) $z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$, б) $z^3 - 27i = 0$, в) $z^4 + 16 = 0$. Зобразіть знайдені корені на комплексній площині.

8. Знайдіть x_{2013}, якщо

   а) $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ та $x_1 = -1$, $x_2 = -1$,

   б) $x_{n+3} = x_{n+1} + 6x_n$ та $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (там дійсно x_{n+3}).

9. На комплексній площині дано коло із центром в точці $z_0 = 3$ та радіусом $r = 1$. Знайдіть образ цього кола при відображенні

   а) $f(z) = i(z - 1)$,

   б) $f(z) = \frac{1}{z}$.