Геометрична каша – 2

1) Нехай AA_1, BB_1, CC_1 - висоти трикутника ABC. Прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинають коло , описане навколо ABC, в точках A_2, B_2, C_2 відповідно. Прямі Сімсона відповідні точкам A_2, B_2, C_2 утворюють трикутник $A_3B_3C_3$ (A_3 перетин прямих відповідних B_2, C_2). Довести що центри мас трикутників $A_1B_1C_1$ та $A_3B_3C_3$ співпадають.
2) Доведіть, що три кола, кожна з яких проходить через вершину трикутника, основу висоти з цієї вершини, і дотикається радіуса описаного кола трикутника проведеного до цієї вершини проходять через 2 точки, що лежать на прямій Ейлера даного трикутника.
3) Дано трикутник ABC. A_1, B_1, C_1 - середини відповідних сторін. K та L - основи перпендикулярів з вершин B і C на прямі A_1C_1 та A_1B_1 відповідно, O - центр кола 9 точок. Довести що пряма A_1O ділить KL навпіл.
4) Довести, що пряма, яка ділить площу та периметр трикутника навпіл проходить через центр вписаного кола.
5) Дано трикутник ABC та точка M. Пряма, що проходить через M перетинає сторони, BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Прямі AM, BM, CM перетинають описане коло в A_2, B_2, C_2. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці на описаному колі трикутника ABC.
6) Розглянемо 4 точки на площині, ніякі 3 з яких не лежать на одній прямій. Довести, що 4 педальні кола, що відповідають кожній з відповідних точок відносно трикутника утвореного іншими трьома, мають спільну точку.
7) Нехай $ABCD$ - опуклий чотирикутник. $\angle ABC = \angle ADC$, M та N - основи перпендикулярів, опущених з A на BC та CD, K - точка перетину прямих MD та NB. Довести, що прямі AK та NM перпендикулярні.
8) Довести, що серединні перпендикуляри, встановлені до відрізків, що з'єднують точки перетину висот і центри описаних кіл чотирьох трикутників, утворених 4 прямими площини, перетинаються в одній точці. *(Точка Ервея)*
9) Дано кут з вершиною A і коло, вписане в нього. Довільна пряма, яка дотикається до даного кола перетинає сторони кута в точках B, C. Довести, що описане коло трикутника ABC дотикається до фіксованого кола, вписаного в даний кут.
10) Нехай коло α дотикається сторони AC трикутника ABC в точці M та описаного кола (на дузі AB). Прямая YM, де Y - центр вписаного кола в трикутник ABC, вдруге перетинає α в точці P. Довести, що пряма BP дотикається до α.
11) В трикутнику ABC на стороні AC взято точку D. Нехай O_1 - центр кола, що дотикається до AD, BD і кола описаного навколо ABC, а O_2 - центр кола, що дотикається до CD, BD і кола описаного навколо ABC. Довести пряма O_1O_2 проходить через центр вписаного кола трикутника ABC.*(Віктор Тебо)*
12) Довести, що точка перетину діагоналей чотирикутника з вершинами в точках дотику кола 9 точок ABC з вписаним та зовнівписаними колами цього трикутника лежить на його середній лінії.
13) Нехай $A_1A_2A_3A_4$ - опуклий чотирикутник, в якому немає паралельних сторін. Для кожного $i = 1,2,3,4$ визначимо ω_i, що лежитьзовні чотирикутника та дотикається до прямих A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$, та $A_{i-1}A_i$. Нехай T_i - точка дотику ω_i та прямої A_iA_{i+1}. Довести прямі A_1A_2, A_3A_4 та T_2T_4 перетинаються в одній точці тоді і лише тоді, коли прямі A_3A_2, A_1A_4 та T_1T_3 перетинаються в одній точці.

14) В кут з вершиною A вписано фіксоване коло γ. Довільна дотична до цього кола перетинає сторони кута в точках B, C, при цьому, це коло вписане в трикутник ABC. Коло ω проходить через точки B та C, так, що хорда BC ділить ω на 2 дуги з фіксованою градусною мірою.(дуга поза трикутником має фіксовану величину). Довести, що коло ω дотикається до 2 фіксованих кіл , що дотикаються до AB та AC.
(В. Ю. Протасов)

15) Коло ω проходить через вершини B та C трикутника ABC, так, що A лежить ззовні кола.Розглянемо коло λ, що дотикається до AB та AC та ω. Нехай Q - точка дотику λ та ω. Довести, що бісектриса кута BQC проходить через центр вписаного в ABC кола. *(В.Ю. Протасов).*

16) Дано трикутник ABC. A_1, B_1, C_1 - середини відповідних сторін. Відомо, що знайшлись точки Q та P такі, що $AQ = A_1P$, $BQ = B_1P$, $CQ = C_1P$. Довести, що всі такі прямі PQ проходять через фіксовану точку.

17) Розглянемо педальні трикутники точок P та Q відносно трикутника ABC. Виявилося, що вони подібні. Довести, що пряма PQ проходить через O - центр описаного кола трикутника ABC.

18) Нехай трикутник ABC з кутом $\angle BCA = 90^\circ$. Нехай D - основа висоти опущенної з вершини C. Нехай X - належить цій висоті. Точка K на відрізку AX така, що $BK = BC$. Аналогічно, точка L на відрізку BX, що $AL = AC$. Нехай M - точка перетину AL та BK. Довести $ML = MK$.

19) Задано трикутник ABC, точки E та F - точки дотику вписаного кола до сторін AC та AB, I - його центр, M - середина сторони BC. N - точка перетину EF та AM. X та Y другі точки перетину кола з діаметром BC з прямими BI та CI відповідно. Довести $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{AC}{AB}$.

20) Нехай CC_0 - медіана трикутника ABC. Серединні перпендикуляри до сторін AC і BC перетинають CC_0 в точках A_c та B_c. Прямі AA_c та BB_c перетинаються в точці C_1. Аналогічно визначаються точки A_1 та B_1. Довести, що коло $A_1B_1C_1$ проходить через центр описаного кола трикутника ABC.