Ймовірнісний метод

На 95% безопасно и законом не запрещено

Задача 1. Нехай $R(k,k)$ — число Рамсея (тобто найменше таке n, що повний граф на n вершинах, який розфарбували в два кольори, має однокольоровий повний підграф на k вершинах). Доведіть, що якщо $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, то $R(k,k) > n$.

Задача 2. Нехай F — деяка множина рядків з нулів і одиниць довжиною не більше ніж k, причому відомо, що жоден з рядків в F не є початком якогось іншого рядка з F. Позначимо через N_i кількість рядків в F довжини i ($1 \leq i \leq k$). Доведіть, що

$$1 \geq \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{4} + \cdots + \frac{N_k}{2^k}.$$

Задача 3. Дано два кола, обидва розбивають на $2n$ рівних дуг, n з яких білі, а n — чорні. Доведіть, що можна сумістити ці два кола так, що щонайменше n дуг співпадуть за кольором.

Задача 4. Дано просте число p, натуральне n і цілі числа $0 < a_1 < \cdots < a_m < p$, причому $p > n > 10m^2$. Доведіть, що існує натуральний $0 < x < p$ такий, що всі числа

$$(xa_i \mod p) \mod n,$$

різні.

Задача 5. Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — вектори довжини 1 на площині. Доведіть, що можна знайти такі числа $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, що

$$|\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}.$$

Задача 6. Дано граф з n вершинами і $nd/2$ ребрами, $d \geq 1$. Доведіть, що існує підграф з щонайменше $n/2d$ вершинами такий, що жодні дві вершини в ньому не пов'язані ребром.

Додому

Задача 1. Дано повний граф на n вершинах. Доведіть, що якщо $\binom{n}{k} \cdot (1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то можна ввести орієнтацію ребер на цьому графі так, що для кожного набору з k вершин буде існувати вершина, ребра з якої входять в кожну з тих k.

Задача 2. Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — вектори довжини 1 на площині і $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$. Покладемо $w = p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n$. Доведіть, що можна знайти такі числа $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$, для яких

$$|w - \epsilon_1 v_1 - \cdots - \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)}.$$

Задача 3. Доведіть, що для довільного натурального n

$$R(k,k) > n - \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}},$$

(див. задачу 1 класної роботи.)