Тч в многочленах

1 $P(x)$ - многочлен з цілими коефіцієнтами. $k \geq 6$. Довести, що коли P в k цілих точках приймає значення з $\{1, 2, 3 \ldots k-1\}$, то ці значення рівні.

2 $f(x) \in \mathbb{C}$. Довести, що існує c (Залежне лише від f), що $\forall P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$, кількість різних коренів полінома $f(P(x))$ не перевищує $\deg P + c$.

3 (*Многочлени Бернуллі)* Довести, що існує єдиний многочлен $P_k(x)$, такий, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується $P_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Знайти $\deg(P_k)$. Знайти старший коефіцієнт P_k. Якщо $k \vdots 2$, то знайти $P_k(-1/2)$.

4 Довести многочлен $x^n + 5x^{n-1} + 3$ - незвідний над $\mathbb{Z}$, де $n > 1$.

5 $a_1, \ldots a_n$ - різні цілі числа. Довести $(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ - незвідний.

6. $a_1, \ldots a_n$ - різні цілі числа. Довести $(x-a_1)^2 \ldots (x-a_n)^2 + 1$ - незвідний.

7 p - просте. Довести $x^p - x - a$ - незвідний при a не ділиться на p.

8 $P(x)$ - многочлен степеня n з цілими коефіцієнтами. Нехай $Q(x) = P^{(k)}(x) = P(\ldots(x)..)$ Довести, рівняння $Q(x) = x$ має не більше за n цілих коренів.

9 p - просте. $f \in \mathbb{Z}_{[x]}, \deg(f) = d$. Також $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) \equiv 0$ або $1 (\bmod p)$. Довести $d \geq p-1$.

10. Знайти всі $P \in \mathbb{Z}_{[x]}$, що існують $c_i \in \{-1, 1\}$ та $a, b \in \mathbb{Z}$ та

$$(x^2 + ax + b)P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + .. + c_0$$

11. N - збалансоване, якщо в розкладі N парна кількість простих дільників (враховуючи кратність) $P(x) = (x+a)(x+b)$.

1)Довести існують a, b, $a \neq b$, що $P(1), P(2), \ldots P(50)$ - Збалансовані.

2)Довести, що коли $P(x)$ збалансоване для $\forall x \in \mathbb{N}$, то $a = b$.

12 Знайдіть всі многочлени $f(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ такі, що $\forall p$ - просте та $u, v \in \mathbb{N}$ та

$$uv - 1 \vdots p \Rightarrow f(u)f(v) - 1 \vdots p.$$

13 $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_0, .. a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n > 0$, $n \geq 2$. Довести існує m, що $P(m!)$ - складене.