Комбінаторика для чотких пацанів-1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. Дано підножини $A, B \subset \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$, причому $|A|+|B| \geq n+2$. Доведіть, що знайдуться $a \in A$, $b \in B$, для яких $a+b=2^k$ для деякого цілого $k \geq 0$.

2. Дано непарне $n \geq 3$ та $M = \{n,\ 2n+1,\ 3n+2\}$. Назвемо підмножину $B \subset \{1, 2, \ldots, 2n\}$ M-вільною, якщо сума жодної пари елементів B не лежить в M. Знайдіть кількість впорядкованих розбиттів $\{1,\ 2, \ldots,\ 2n\}$ на M-вільні множини.

3. Дано натуральне число $n \geq 3$. Назвемо множину натуральних чисел B невипуклою, якщо в ній не можна знайти числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, для яких $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$ для всіх $1 \leq k \leq n-1$. Доведіть, що множину $\{1,\ 2, \ldots, n^2-n\}$ можна розбити на невипуклі.

4. В футбольній лізі $n \geq 6$ команд. Кожна команда має два комплекти футбольної форми різних кольорів: домашню та виїздну. Коли грають дві команди, господарі одягають домашню форму, і гості — теж домашню, за умови, що їх домашня форма відрізняється за кольором від домашньої форми господарів, а інакше — виїздну. Керівництво ліги постановило, що в довільних двох матчах команди мають грати в формах не менш ніж 3 різних кольорів. Знайдіть наймшеншу кількість кольорів форми, які потрібно використати, щоб умови виконувалися.

5. В компании $2N$ мальчиков и 6 девочек. Известно, что для любой пары девочек существует ровно N мальчиков, которые знакомы с одно и не знакомы с другой девочкой. Докажите, что количество мальчиков, знакомых со всеми девочками, не превышает
$$\frac{N}{3}.$$

6. n школьников ходят на кружки. Известно, что на каждый кружок ходит минимум 2 школьника. Также, если в двух кружках есть хотя бы два общих школьника, то количество школьников, которые ходят в них, разная. Докажите, что классов не более, чем $(n-1)^2$.

7. В классе a мальчиков и b девочек. Каждый мальчик считает каждую девочку либо умной, либо красивой. Предположим, что оценки любой пары мальчиков совпадают не больше, чем для k девочек. Докажите, что $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

8. Дано цілі числа $m, n \geq 1$, а також цілі $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. Доведіть, що існує підмножина $T \subset \mathbb{Z}$, така що $|T| \leq 1 + \frac{a_m - a_1}{2n+1}$ та для всіх $1 \leq i \leq m$ існує $t \in T$ та ціле $-n \leq s \leq n$, для яких $a_i = t + s$.

9. В купці лежить n камінців. Пацанчік Вася робить таке: довільну з існуючих купок (в якій більше 1 камінця) він розділяє на дві частини та додає до числа, яке має, добуток кількостей камінців в купках, на які він розділив. Доведіть, що при довільному способі розбиття в кінці він отримає одне й те саме число.

10. Нехай π — перестановка множини $\{1, 2, \ldots, n\}$. Позначимо через $z(\pi)$ кількість циклів в цій перестановці. Доведіть, що
$$\sum_{\pi} 2^{z(\pi)} = (n+1)!.$$

11. Дана n-елементна множина та 2^{n-1} її підмножин. Відомо, що у довільних трьох підмножин є спільний елемент. Доведіть, що у всіх підмножин є рівно один спільний елемент.