Задавальник на зимні канікули

1. Нехай AE – бісектриса трикутника ABC, а точка D належить його стороні AC, причому $\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA$. Доведіть, що DE – бісектриса кута BDC.
2. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.
3. Дано чотирикутник ABCD, у якому $AB \parallel CD,\ AB > CD$. Відомо, що в цьому чотирикутнику відстань між серединами паралельних сторін AB і CD , дорівнює відстані між серединами діагоналей. Доведіть, що кут ADB – тупий.
4. Микола та Сергійко грають у гру, по черзі записують цілі числа в клітинки таблиці розмірами 7x9 (7 рядків, 9 стовпчиків). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується , поки вони не заповнять числами всю таблицю. Потім підраховуються значення $S_1, S_2, .., S_7$ - суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел $S_1, S_2, .., S_7$ парних більше, ніж непарних, виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш.
5. Множина X складається з 6 елементів. Нехай $A_1, A_2, .., A_9$ - такі підиножини X, що кожна з них містить по 3 елементи. Доведіть, що існує таке «пофарбування» елементів X у два кольори, що кожна множина A_i $(1 \le i \le 9)$ буде містити принаймні два різнокольорових елементи.
6. А) Чи можна числа 1, 2, 3, 4,.. , 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?
   Б) Чи можна здійснити цю процедуру для чисел 1, 2, 3,.. ,999?
7. Розв’яжіть рівняння: $\left||x|-2\right| = x$.
8. Чи існують такі k $і$ l такі, що $k^3 + l^3 = 2001$.
9. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата ABCD вибрали точки M,P,N,Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Доведіть, що $P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}$, де P_F - позначає периметр фігури F.
10. Дано купу з 2001 сірника. Двоє грають в наступну гру. Вони по черзі роблять такі ходи: вибирається довільна купа, що містить більше від одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатись з одного сірника. Після кожного поділу купи на дві записується добуток кількостей сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилась без остачі на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?
11. Доведіть, що число $1334\underbrace{00..00}_{2002}4669$ ділиться на 2001.
12. Яких п’ятицифрових чисел більше: які не діляться на 5, чи тих, у яких ані перша, ані друга цифри зліва не п’ятірки?
13. У скрині Карлсона лежать цукерки трьох сортів: з горіхами, з родзинками та з полуницями. Карлсонстверджує, що які б 100 цукерок не взяли, серед них

обов’язково зустрінуться цукерки з родзинками і з полуницями. Яка найбільша кількість цукерок можу бути в скрині?

14. Доведіть, що центри квадратів, зовні побудованих на сторонах довільного паралелограма, є вершинами деякого квадрату.
15. Задумали два натуральних числа. Математику А повідомили їхню суму, а математику В – суму їхніх квадратів. Якщо А і В обміняються своєю інформацією, то вони, напевно, визначать ці числа. Але вони визначили їх у процесі такої розмови:
    В: «Я не знаю, які це числа».
    А: «Їхня сума більша від 10».
    В: «Тоді я знаю, які це числа».
    Знайдіть і ви ці числа.
16.
17. Нехай К – середина гіпотенузи АВ прямокутного трикутника АВС, а М – точка, яку відмітили на катеті АС так, що $AM = 2CM$. Доведіть, що $\angle MKC = \angle ABM$.
18. У кожній клітинці таблиці розміром 2002х2004 стоїть 1. Дозволяється вибрати довільний квадрат 2х2 і змінити в ньому знак у всіх чисел. Чи можна за допомогою таких дій отримати «шахове» розміщення знаків у таблиці?
19. До кожної клітинки таблиці 3х3 записали по одному додатному числу. Добуток чисел у кожному квадраті розміром 2х2 дорівнює 2. Яке число стоїть у центральній клітинці таблиці?
20. З клітчастої дошки розміром 8х8 по клітинках вирізали 12 прямокутників розміром 1х2. Чи обов’язково з решти дошки можна вирізати прямокутник 1х3?
21. Сто піратв переносили з корабля на берег скрині зі скарбом. Кожну скриню несли семеро піратів. Капітан вважав, що під час перенесення всі пірати заробили порівну, бо кожен брав участь у перенесенні 65 скринь. Доведіть, що капітан помилився.
22. У клубі зустрілися двадцять джентельменів. Деякі з них були в капелюхах, а деякі – ні . Час від часу один із джентельменів знімав свого капелюха і надівав його на одного з тих, у кого в цей момент капелюха не було. Наприкінці десять джентельменів підрахували, що кожен з них віддавав капелюха більше разів, аніж отримував. Скільки джентельменів прийшло в капелюхах?
23. Усередині трикутника АВС на бісектрисі його кута В відмітили точку М так, що $AM = AC, \angle BCM = 30$. Знайдіть величину кута АМВ.
24. Малюк і Карлсон грають в таку гру: вони беруть шоколадку розміром 2002х2003 і по черзі викусують з неї «по клітинках» шматочи (не обов’язково від країв): Карлсон – розміром 2х2, а Малюк розміром 1х1. Якщо не залишилось жодного шматочка 2х2, то весь шоколад, що залишився з’їдає Малюк. Виграє той, хто більше з’їсть шоколаду. Починає гру Малюк. Хто з них може забезпечити собі перемогу?
25. Вузли нескінченного в усі боки аркуша клітчастого паперу пофарбовані в три кольори (причому всі три кольори використано) . Доведіть, що знайдеться прямокутний трикутник (з катетами, які не обов’язково паралельні лініям сітки), усі вершини якого розташовані у вузлах і мають різні кольори.
26. Розв’яжіть рівняння $\left|\left|4|x|-3\right|-2\right| = 3$.

27. Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle A < 45, \angle C = 90$), на сторонах AC і AB якого обрано точки D і E відповідно, що $BD = AD$ і $CB = CE$. Нехай відрізки BD і CE перетинаються в точці O. Доведіть, що $\angle DOE = 90$.

28. Петрик вибрав три різні цифри a, b, c ($a \neq b, b \neq c, c \neq a$) і записав усі можливі різні тризначні числа, десятковий запис кожного з яких містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з 0. З'ясувалося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані і доведіть, що інших варіантів немає.

29.Дано горизонтальну клітчасту смугу розміром 1х2004. Нехай у кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє по черзі беруть одну одну з фішок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через фішки і ставити фішки в клітинки, у яких уже є якась фішка заборонено). Переможцем вважається той з гравців, який не може зробити свій черговий хід. Хто виграє при правильній грі?

30. Знайдіть усі такі натуральні числа n, для яких число $n^4 - 22n^2 - 46$ ділиться без остачі на n+5.

31. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC обрано точку K так, що $\angle BAK = 24$. На відрізку AK обрано точку M так, що $\angle ABM = 90, AM = 2BK$. Знайдіть величини всіх кутів трикутника ABC.

32. Деякі сторони клітинок шахівниці розмірами 8х8 пофарбовано червоним кольором, а решта синім. За один крок дозволяється обирати деяку клітинку дошки та перефарбувати всі її сторони одночасно в протилежний колір. Чи завжди за декілька ходів можна зробити так, щоб синіми стали менше від четертої частини загальної кількості сторін?

33. Будь-які чотири гирьки з деяких десяти гирьок переважують будь-які три з цих гирьок. Чи правильно, що будь-які три з цих десяти гирьок переважують будь-які дві з цих гирьок?

34. Коло з центром на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC проходить через вершину A і дотикається до катета BC в точці M. Доведіть, що AM – бісектриса кута BAC.

35. На куб із воску сіли спочивати декілька бджіл. З'ясувалося, що що на всіх гранях кількість бджіл різна. Знайдіть найменшу кількість бджіл, які могли спочивати на кубі.

36.Є набір гир, серед яких є п'ять, попарно різних за вагою, причому для будь-яких двох гир знайдуться дві інші гирі такої ж сумарної ваги. Яке найменше число гир може бути в такому наборі?

37. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що число $n^2 + n$ ділиться без остачі на 2006.

38. Уздовж алеї, яка простягається від воріт до будівлі школи, стоять 20 стовпчиків, кожен з яких має або висоту 20см, або висоту 30см, або 40см. Семикласник, пройшовши алеєю від школи до воріт нарахував 11 стовпчиків, кожен з яких був нижчим від наступного за ним. Доведіть, що зворотнім шляхом він нарахує не менше від 5 таких стовпчиків.

39. Невід'ємні цілі числа x, y, z задовольняють рівність $28x+30y+31z=365$. Знайдіть значення виразу $x+y+z$.
40. На шахівниці розміром 11x11 білих клітинок на одну більше, ніж чорних. На чорних клітинках стоять 11 тур. Доведіть, що серед них є дві тури, що б'ють одна одну.
41. У чотирикутику ABCD кути A і C рівні. Бісектриса кута B перетинає AD в точці P. Пряма, яка проходить через вершину A перпендикулярно до BP перетинає сторону BC в точці Q. Доведіть, що прямі CD і PQ паралельні.
42. Доведіть, що коли $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.
43. Доведіть, що значення виразу $2^{10}+5^{12}$ є складеним числом.
44. Числа a, b, c такі, що $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$. Чому дорівнює значення виразу a+b-2c?
45. Відомо, що $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$, $ax+by+cz=1$. Доведіть, що a=x, b=y, c=z.
46. Доведіть, що рівняння $x^4-x+\frac{1}{2}=0$ коренів немає.
47. Відомо, що $a^2+b^2+c^2=30, a-b-c=4$. Доведіть, що $bc-ab-ac=-7$.
48. Відомо, що $a^2+b^2+c^2=26, ab-ac-bc=-11$. Знайдіть значення виразу a+b-c.
49. Розкладіть на множники $a^2+b^2+3c^2+2ab+4ac+4bc$.
50. Розкладіть на множники вираз $a^2+8b^2+c^2-6ab-6bc+2ac$.