Теорія кіл

Сердюк Назар, nsaann@gmail.com

1. Два кола перетинаються в точках P та Q. Третє коло з центром в точці P перетинає перше коло в точках A та B, а друге в точках C та D. Доведіть, що $\angle AQD = \angle BQC$.

2. Дана трапеція з паралельними сторонами $AB > CD$. Точки K та L вибрані на відрізках AB та CD відповідно так, що $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Припустимо, що точки P та Q на відрізку KL задовольняють умову $\angle APB = \angle BCD$ і $\angle CQD = \angle ABC$. Доведіть, що точки P, Q, B, C лежать на одному колі.

3. Кола S_1 та S_2 дотикаються зовнішнім чином у точці C і дотикиються внутрішнім чином до кола S в точках A та B відповідно. Пряма BC перетинає коло S_1 другий раз в точці D. Доведіть, що $\angle DAB = 90°$.

4. Доведіть, що прямі симетричні прямій l, що проходить через ортоцентр трикутника ABC, відносно сторін AB, BC, CA перетинаються в одній точці, що лежить на описаному колі трикутника ABC.

5. Всередині трикутника ABC відмічена точка P. Прямі CP та BP перетинають сторони AB та AC трикутника в точках N та M відповідно. Відомо, що $AB + BP = AC + CP$. Доведіть, що $AN + NP = AM + MP$.

6. Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Коло S_1 проходить через точки A та B і дотикається до сторони CD в точці X. Коло S_2 проходить через точки C та D і дотикається до сторони AB в точці Y. Доведіть, що $\angle AXB = \angle CYD$.

7. На стороні BC трикутника ABC відмічені точки X та Y. Точки X' та Y' симетричні точкам X та Y відповідно відносно середини BC. Відомо, що існує коло, що проходить через точки X та Y та дотикається до прямих AB та AC. Доведіть, що існує коло, що проходить через точки X' та Y' та дотикається до прямих AB та AC.

8. Дано два кола S_1 та S_2. Коло S дотикається єдиним чином до S_1 та S_2 (наприклад внутрішнім чином до S_1 і зовнішнім чином до S_2) в точках A та B. Доведіть, що усі такі прямі AB проходять через одну точку.

9. Кола S_1 та S_2 дотикаються до кола S в точках A та B відповідно. На колі S відмічена точка P, відмінна від A та B. Прямі PA та PB перетинають кола S_1 та S_2 другий раз в точках X та Y відповідно. Доведіть, що якщо XY дотикається до S_1, то XY дотикається до S_2.

10. Дано два кола, що не перетинаються і точка P така, що довжини дотичних PA, PB, PC, PD рівні (точки A, B лежать на першому колі, а точки C, D на другому, $ABCD$ - випуклий чотирикутник). Доведіть, що точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ співпадає з точкою перетину спільних зовнішніх дотичних до цих кіл.

11. В трикутнику ABC $\angle A > \angle C$. Всередині $\triangle ABC$ відмітили точку P, а зовні точку Q так, що $\angle PAC = \angle BCA$, $PQ \parallel AB$, $BQ \parallel AC$. На стороні BC відмітили точку R так, що точки R та Q лежать у різних півплощинах відносно прямої AP і $\angle PRQ = \angle BCA$. Доведіть, що кола описані навколо трикутників PQR і ABC дотикаються.

12. а). На двух чевіанах трикутника як на діаметрах побудовані кола. Доведіть, що ортоцентр трикутника лежить на радикальній вісі цих кіл.
    б). Чотири прямі утворюють чотири трикутника. Доведіть, що чотири ортоцентра цих трикутників лежить на одній прямій.

13. Через центр правильного трикутника ABC проведена пряма, що перетинає прямі AB, BC та CA в точках C_1, A_1 та B_1 відповідно. Коло з центром в точці A_1, що проходить черех точку A, перетинає коло з центром в точці B_1, що проходить через точку B в точках K та L. Доведіть, що C_1 $-$ центр кола, описаного навколо трикутника CKL.

14. На сторонах трикутника ABC як на основах побудовані рівнобедрені трикутники ABO_3, BCO_1, CAO_2 зовні ABC. Відомо, що $\angle AO_3B + \angle BO_1C + \angle CO_2A = 360°$. Доведіть, що $\angle O_1O_2O_3 = \frac{1}{2}\angle AO_2C$, $\angle O_2O_3O_1 = \frac{1}{2}\angle BO_3A$, $\angle O_3O_1O_2 = \frac{1}{2}\angle CO_1B$.

15. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторін BC, CA та AB в точках D, E та F відповідно; I – інцентр $\triangle ABC$; H_a, M_a – основи висоти і медіани проведених з вершини A відповідно; P, Q – основи перпендикулярів опущених з точок B та C відповідно на бісектрису $\angle BAC$.
    а). Доведіть, що точки H_a, M_a, P, Q лежать на одному колі.
    б). Доведіть, що D – інцентр трикутника H_aPQ (використайте подібність).
    в). Нехай O_a – центр описаного кола трикутника H_aPQ. Точки O_b та O_c визначаються аналогічно. Доведіть, що O_aD, O_bE, O_cF перетинаються в точці X, що лежить на вписаному колі трикутника $\triangle ABC$ (використайте подібність).
    г). Доведіть, що X – це точка дотику вписаного кола та кола 9 точок трикутника ABC.