Олімпіада для крутих пацанів -1

1. Знайдіть всі натуральні числа m та n, для яких $n^m - m$ ділить $m^2 + 2m$.

2. Гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC вписано в коло Ω. Коло ω з центром в O проходить через B та C і перетинає AB та AC в точках E та D відповідно. Точка P лежить на більшій дузі BAC кола Ω. Доведіть, що прямі BD, CE, OP перетинаються в одній точці тоді і лише тоді, коли трикутники PBD та PCE мають спільний інцентр.

3. Для додатніх чисел a, b, c, d, e, f доведіть нерівність

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}} + \sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}} \le \frac{2}{3}\sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}.$$

4. Позначимо через T скінченну множину натуральних чисел більших за 1. Підмножина S множини T називається *гарною*, якщо для кожного $t \in T$ існує якесь $s \in S$, для якого $\gcd(s, t) > 1$ (найбільший спільний дільник). Доведіть, що кількість гарних підмножин T є непарною.