Гармонічний чотирикутник

Означення 1 *Впорядкована четвірка точок* (A, B, C, D) *на прямій називається гармонічною, якщо*

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Означення 2 *Пряма, що симетрична медіані* AM *відносно бісектриси* AL *трикутника* ABC*, називається симедіаною.*

Факт 1 *Якщо симедіана, проведена з вершини* A*, перетинає сторону* BC *в точці* S*, то* $BS : CS = AB^2 : AC^2$*.*

Означення 3 *Вписаний в коло чотирикутник називається гармонічним, якщо добутки довжин його протилежних сторін рівні.*

Факт 2 *В гармонічному чотирикутнику* $ABCD$ *діагональ* AC *є симедіаною трикутників* ABD *і* CBD*. Аналогічно із діагоналлю* BD*.*

Факт 3 *Нехай дотичні в точках* A *і* C *до описаного кола гармонічного чотирикутника* $ABCD$*, перетинаються в точці* P*, а діагоналі* AC *і* BD *— в точці* M*. Тоді точки* D, M, B, P *утворюють гармонічну четвірку точок.*

1. CL — бісектриса кута BCA трикутника ABC, CD — симедіана трикутника ABC. Точка D — перетин симедіани із описаним колом. Доведіть, що DL — бісектриса кута BDA.

2. Нехай N — середина діагоналі AC гармонічного чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $\angle BNC = \angle DNC$.

3. В гармонічному чотирикутнику відстані від точки перетину діагоналей до сторін пропорційні довжинам цих сторін.

4. Зовінішня і внутрішня бісектриси кута A трикутника ABC перетинають пряму BC в точках D і E. Коло з діаметром DE перетинає описане коло трикутника ABC в точках A і X. Довести, що AX — симедіана трикутника ABC.

5. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. Дотичні до цього кола, проведені в точках A і C, перетинаються в точці P, яка не лежить на прямій BD, причому $PA^2 = PD \cdot PB$. Доведіть, що діагональ BD ділить діагональ AC навпіл.

6. В колі проведено дві паралельні хорди AB та CD. Пряма, проведена через C і середину відрізка AB вдруге перетинає коло в точці E. Нехай K — середина відрізка DE. Доведіть, що $\angle AKE = \angle BKE$.

7. Через точку A, що лежить поза колом, проведені дві дотичні AB і AC, і пряма, яка перетинає дане коло в точках X і Y. Доведіть, що точки A, B, C і середина відрізка XY лежать на одному колі.

8. Доведіть, що якщо із точки D — перетину симедіани CD з описаним колом трикутника ABC опустити перпендикуляри DD_1, DD_2, DD_3 на прямі AC, AB, BC, то D_2 — середина відрізка D_1D_3

9. (Всерос-2008) Прямі, симетричні діагоналі AC вписаного чотирикутника $ABCD$ відносно бісектрис кутів A і C, проходять через середину діагоналі BD. Доведіть, що прямі, симетричні діагоналі BD відносно бісектрис кутів B і D, проходять через середину діагоналі AC.

10. Коло S_1 проходить через точки A, B і дотикається прямої AC, коло S_2 проходить через точки A, C і дотикається прямої AB. Доведіть, що спільна хорда цих кіл є симедіаною трикутника ABC.

11. (Всерос-2009) В трикутнику ABC проведена бісектриса BD (точка D належить відрізку AC). Пряма BD перетинає коло Ω, описане навколо трикутника ABC в точках B і E. Коло ω, побудоване на відрізку DE як на діаметрі, перетинає коло Ω в точках E і F. Доведіть, що пряма симетрична прямій BF відносно прямої BD, містить медіану трикутника ABC.

12. (Всерос-2007) Чотрикутник $ABCD$ вписано в коло з центром O. Точки C', D' симетричні ортоцентрам трикутника ABD і ABC відносно O. Доведіть, що якщо прямі BD і BD' симетричні відносно бісектриси кута B, то прямі AC і AC' симетричні відносно бісектриси кута A.

13. (IMAR Contest 2006) Нехай ABC рівнобедрений трикутник, у якому $AB = AC$ і M – середина BC. Знайти ГМТ точок P всередині трикутника таких, що $\angle BPM + \angle CPA = \pi$.

14. (Всерос-1995) В гострокутному трикутнику ABC на висоті BK як на діаметрі побудовано коло S, яке перетинає сторони AB і BC в точках E і F відповідно. До кола S в точках E і F проведені дотичні, які перетинаються в точці P. Доведіть, що BP містить медіану трикутника ABC.

15. Два кола ω_1 і ω_2 перетинаються в точках M і K. З довільної точки A кола ω_1 провели дві прямі AK і AM, які вдруге перетнули коло ω_2 в точках B і C. Доведіть, що медіани трикутника ABC, проведені з вершини A, проходять через фіксовану точку, яка не залежить від вибору точки A.