

Розв'язуємо задачі

1. Довести рівність

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000}.$$

2. Знайти суму:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!.$$

3. Чи може число $k^2 + 3k + 5$ ділитися на 121 (k — ціле)?

4. Знайти суму

$$1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ разів}}.$$

5. Обчислити $(2 - \sqrt{3})^7 \cdot (2 + \sqrt{3})^7$.

6. Число $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ — ціле. Знайти його. Розв'язати рівняння:

7. $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ в \mathbb{Z}^+ .

8. $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$ в \mathbb{Z} .

9. $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$ в \mathbb{Z} .

10. $x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) = w^2$ в \mathbb{N} .

11. $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$ в \mathbb{Z} .

12. $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ в \mathbb{N} .

13. $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 27xyz = 0$ в \mathbb{N} .

14. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 0$ в \mathbb{Z} .