Language: **Ukrainian**

Day: **1**

*Вівторок, 23 липня, 2013*

**Задача 1.** Доведіть, що для будь-якої пари натуральних чисел $k$ та $n$ існують $k$ (не обов'язково різних) натуральних чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$ таких, що виконується рівність

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**Задача 2.** *Колумбійською конфігурацією* будемо називати такий набір з 4027 точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій, при цьому 2013 з них пофарбовано в червоний колір, а решта 2014 – у блакитний. Розглянемо набір прямих, що розділяють площину на декілька областей. Назвемр цей набір *гарним* для даної колумбійської конфігурації точок, якщо виконуються такі умови:

- жодна пряма не проходить через жодну точку конфігурації;
- жодна область розбиття не містить точок обох кольорів.

Знайдіть найменше можливе значення $k$ таке, що для довільної колумбійської конфігурації з 4027 точок існує гарний набір з $k$ прямих.

**Задача 3.** Нехай зовнівписане коло трикутника $ABC$, що лежить навпроти вершини $A$, дотикається до сторони $BC$ у точці $A_1$. Точки $B_1$ на стороні $CA$ і $C_1$ на стороні $AB$ визначаються аналогічним чином з використанням зовнівписаних кіл, що лежать навпроти вершин $B$ і $C$, відповідно. Відомо, що центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на колі, описаному навколо трикутника $ABC$. Доведіть, що трикутник $ABC$ прямокутний.

*Зовнівписаним колом трикутника $ABC$, що лежить навпроти вершини $A$, називається коло, яке дотикається до відрізка $BC$, продовження сторони $AB$ за точку $B$ і продовження сторони $AC$ за точку $C$. Зовнівписані кола, що лежать навпроти вершин $B$ і $C$, визначаються аналогічним чином.*



*Час: 4 години 30 хвилин*
*Кожна задача оцінюється в 7 балів*

*Середа, 24 липня, 2013*

**Задача 4.** Нехай $H$ — точка перетину висот гострокутного трикутника $ABC$. Нехай $W$ — довільна точка на відрізку $BC$, що відмінна від $B$ і $C$. Позначимо через $M$ і $N$ основи висот трикутника $ABC$, що проведені з вершин $B$ і $C$, відповідно. Нехай $\omega_1$ — описане коло трикутника $BWN$, а $X$ — така точка на $\omega_1$, що $WX$ — діаметр $\omega_1$. Аналогічно, нехай $\omega_2$ — описане коло трикутника $CWM$, і $Y$ — така точка на $\omega_2$, що $WY$ — діаметр $\omega_2$. Доведіть, що точки $X$, $Y$ і $H$ лежать на одній прямій.

**Задача 5.** Позначимо через $\mathbb{Q}_{>0}$ множину всіх додатніх раціональних чисел. Нехай $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ — функція, що задовольняє такі умови:

(i) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) існує раціональне число $a > 1$ таке, що $f(a) = a$.

Доведіть, що $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

**Задача 6.** Нехай $n \geq 3$ — ціле число. Розглянемо коло і $n+1$ точку на ньому, що ділять його на рівні дуги. Розглянемо всі способи позначити ці точки числами $0, 1, \ldots, n$ так, що кожне число використовується рівно один раз. Два способи, що відрізняються поворотом, вважаються однаковими. Спосіб позначення назвемо *чудовим*, якщо для довільних чотирьох міток $a < b < c < d$ таких, що $a + d = b + c$, хорда, що з'єднує вершини з мітками $a$ і $d$, не перетинає хорду, що з'єднує точки з мітками $b$ і $c$.

Нехай $M$ — кількість чудових способів позначення. Нехай $N$ — кількість упорядкованих пар $(x, y)$ натуральних чисел, що задовольняють умови $x + y \leq n$ і НСД$(x, y) = 1$. Доведіть, що

$$M = N + 1.$$



*Час: 4 години 30 хвилин*
*Кожна задача оцінюється в 7 балів*