

# Домашнее задание 16.04.14

## 1 Сопряженные числа

1. Какое из чисел больше:  $\sqrt{1979} + \sqrt{1980}$  или  $\sqrt{1978} + \sqrt{1981}$ .
2. Найдите первые  $n$  цифр после запятой числа  $(2 + \sqrt{3})^n$ .
3. Докажите, что для любых натуральных  $n, k$  число

$$\left[ \frac{(2k + 1 + \sqrt{4k + 1})^n}{2^n} \right]$$

делится на  $k$ .

4. Пусть  $d \neq x^2$  при любом натуральном  $x$ . Докажите, что найдётся такое  $\alpha$ , что для любых натуральных  $m, n$  выполняется неравенство

$$\frac{n}{m} - \sqrt{d} \geq \frac{1}{\alpha m^2}.$$

5. Докажите, что уравнение

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

6. Дано число

$$A = \left( \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2} \right)^m,$$

где  $m, n$  — натуральные числа, большие 2. Докажите, что найдётся такое натуральное  $k$ , что

$$A = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

## 2 Старое

1. О графе  $G$  известно, что для любого подмножества его вершин  $D$  количество вершин, соединённых ребром хотя бы с одной вершиной из  $D$  не меньше, чем  $|D|$ . Докажите, что из этого графа можно выбросить не больше  $\frac{|G|}{3}$  вершин так, чтобы все остальные можно было разбить на пары смежных.